Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #3 Procesos de Markov

Cadenas de Markov y Tiempos de Parada

Profesor: Servet Martinez.

Auxiliares: Gonzalo Contador, Gonzalo Mena.

P1. a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, E numerable y (S, Σ) espacio medible. Definimos $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ secuencia de variables aleatorias i.i.d. a valores en S. Sea $f : E \times S \longrightarrow E$ medible y consideremos la siguiente secuencia de variables aleatorias definida recursivamente

$$X_0 = x \in E$$

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$$

Demuestre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cadena de Markov y determine su matriz de transición.

b) Sea μ vector de probabilidad en E, y P matriz de trancisión. Denotemos por t_n la función de distribución acumulada de μ; es decir $t_0 = 0$, $t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(k)$.

Consideramos además, para $i \in E$ las cantidades

$$s_0^{(i)} = 0$$

$$s_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,k}$$

Definimos, para $x \in [0, 1]$ las funciones

$$\varphi(x) = \sum_{k\in E} k 1_{[t_k, t_{k+1})}(x)$$

$$g(i, x) = \sum_{k\in E} k 1_{[s_k^{(i)}, s_{k+1}^{(i)})}(x)$$

donde $\varphi(1) = 1 = g(i, 1)$. A partir de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ secuencia i.i.d. con distribución uniforme en $[0, 1]$ definimos

$$X_0 = \varphi(U_0)$$

$$X_{n+1} = g(X_n, U_{n+1})$$

Demuestre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cadena de Markov con distribución inicial μ y matriz de trancisión P.

P2. Sea T tiempo de parada para una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pruebe lo siguiente:

i) Para toda función f, f es $\mathcal{F}_T$-medible si y sólo si existen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con f_n medible respecto a $\mathcal{F}_n$ tales que $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n 1_{\{T=n\}}$

ii) Para toda $X \in L^1$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_T) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) 1_{\{T=n\}}$

P3. Decimos que $i \in I$ es esencial si $\forall j \in I$ tal que $i \longrightarrow j$ se verifica $j \longrightarrow i$. Diremos también que $J \subseteq I$ es cerrado si $\forall i \in I$ se tiene $\sum\limits_{j\in I} p_{ij} = 1$, y J es cerrado minimal si no contiene ningún subconjunto estricto que sea cerrado. Pruebe lo siguiente:

i) Ser esencial es propiedad de clase.
ii) Si i es esencial entonces $C(i)$ es cerrado minimal.