# Procesos de Markov, Control 2, 2010-1

Profesor: Servet Martínez
Profesores Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

7 de julio del 2010

Para una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ medible y localmente acotada y una función $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ creciente se denota por $H * h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la función $H * h(t) = \int_0^t h(t-x)dH(x)$ (donde $H(0^-) = 0$).

Para una función $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ creciente denotamos por $\hat{H}(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x} dH(x)$, $\theta \geq 0$, su transformada de Laplace. Así pues, si $H$ es una función de distribución y $Z$ una variable aleatoria con $Z \sim H$ se tiene $\hat{H}(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta Z})$.

Se denota $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$.

**P1. Procesos de ramificación dependientes de la edad**

Suponga que un organismo al término de su vida produce un número aleatorio de descendencia de acuerdo a una distribución de probabilidad $\vec{p} = \{p_j : j = 0, 1, 2, \ldots\}$. Los descendientes de cada individuo actúan independientemente y generan su propia descendencia de acuerdo a la misma distribución de probabilidad $\vec{p}$. Se asumirá que $m = \sum_{i=0}^\infty j p_j > 1$.

Las duración de vida de los individuos son variables aleatorias independientes idénticamente distribuídas, con distribución $F$ la que se asume no aritmética y con $F(0) < 1$. Denotamos por $X(t)$ a la cantidad de organismos vivos en $t$. A $(X(t) : t \geq 0)$ se le llama proceso de renovación dependiente de la edad. Supondremos $X_0 = 1$.

El objetivo de este problema es determinar una expresión asintótica para $M(t) = \mathbb{E}(X(t))$.

*a*) Demuestre que existe un único $\alpha > 0$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dF(x) = \frac{1}{m}.$$

*b*) Pruebe que $M(t) = \overline{F}(t) + m \int_0^t M(t-s)dF(s)$

*c*) Defina $f(t) = e^{-\alpha t} M(t)$, $h(t) = e^{-\alpha t}\overline{F}(t)$, $G(s) = m \int_0^s e^{-\alpha x} dF(x)$ para $s \in [0, \infty)$, $\mu_G = \sum_{i=1}^\infty G^i$. Pruebe que

$$f = h + \mu_G * h.$$

*d*) Use el teorema clave de renovación para probar que

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{F}(t)dt}{\int_0^\infty x dG(x)}.$$

*e*) Concluya que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} M(t) = \frac{m-1}{m^2 \alpha \int_0^\infty x e^{-\alpha x} dF(x)}.$$

**P2.** Sea $N = (N(t) : t \geq 0)$ un proceso de renovación. Sea $s > 0$ una cantidad fija. Sea $W$ el tiempo de espera hasta el primer instante $t$ en que la edad $\delta_t = t - S_{N_t}$ supere $s$, es decir

$$W = \inf\{t > 0 : \delta_t > s\}.$$

*a*) Muestre que la función de distribución $F_W$ de $W$ verifica la ecuación:

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & x < s \\ \overline{F}(s) + \int_0^s F_W(x-u)dF(u) & x \geq s \end{cases}$$

*b*) Escriba la ecuación anterior como una ecuación de renovación,

$$F_W(x) = h(x) + \int_0^x F_W(x-u)dG(u), \; x \geq 0.$$

para ciertas funciones creciente $h$ y $G$ y pruebe que si $N = (N(t) : t \geq 0)$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda$ entonces

$$\mathbb{E}(e^{-\theta W}) = \frac{(\lambda+\theta)e^{-(\lambda+\theta)s}}{\theta + \lambda e^{-(\lambda+\theta)s}}, \; \theta \geq 0.$$

**P3.** Sean $(Y_i : i \in \mathbb{N}^*)$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuídas con $\mu = \mathbb{E}(Y_i)$ y $\sigma^2 = \text{Var}(Y_i)$ finitas.

Sea $\tau : \Omega \to \mathbb{N}^*$ un tiempo de parada (tomando valores finitos) con respecto a la filtración $(\sigma(Y_1, ..., Y_n) : n \in \mathbb{N}^*)$. Asuma que $\mathbb{E}(\tau) < \infty$.

Considere la variable aleatoria

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{\tau} (Y_i - \mu).$$

*a*) Pruebe que $\text{Var}(\mathcal{A}) = \mathbb{E}(\tau)\sigma^2$.

*b*) Considere un proceso de renovación $N = (N(t) : t \geq 0)$ definido por las variables aleatorias $(X_i : i \in \mathbb{N}^*)$ independientes idénticamente distribuídas con $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ y $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ finitas. Use la notación usual de la teoría, en particular $m(t) = \mathbb{E}(N(t))$. Pruebe que

$$\text{Var}\left(S_{N(t)+1} - \mu(N(t)+1)\right) = (m(t)+1)\sigma^2.$$

Tiempo: 4 horas.

Al interior de cada problema cada pregunta vale lo mismo, y los problemas tienen los pesos respectivos: Problema 1: 0.4: Problemas 2 y 3: 0.3 cada uno.