Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #11 Procesos de Markov

Teoría de Renovación

Profesor: Servet Martinez.

Auxiliares: Gonzalo Contador, Gonzalo Mena.

P1. *La paradoja del tiempo de inspeccion*

Sea $(N(t))_{t>0}$ proceso de renovación generado por la secuencia iid $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pruebe que para todo tiempo $t > 0$ y para todo $x > 0$ se verifica

$$\mathbb{P}(X_{N(t)+1} > x) \geqslant \mathbb{P}(X_1 > x)$$

Esto es, que la probabilidad de que la renovación siguiente demore más de un cierto x es mayor que la probabilidad de que una renovación cualquiera demore lo mismo.

P2. Sea $(N(t))_{t>0}$ proceso de renovación generado por la secuencia iid $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $\mathbb{E}(X_1) = \mu < \infty$. Consideremos la secuencia $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, iid, tal que para todo n $Y_n \leqslant X_n$ $\mathbb{P}$-casi seguramente, y además Y_n es independiente de X_r si $n \neq r$. Notamos $\mathbb{E}(Y_1) = \nu$. Definimos, para $t > 0$

$$W_t = \sum_{n\in N} 1_{[S_n, S_n+Y_n]}(t)$$

es decir, $W_t = 1$ si existe n tal que "en t sucede Y_n". Pruebe que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(W_t = 1) = \frac{\nu}{\mu}$$

P3. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proceso de renovación con distribución no aritmética. Defina $Y(t) := S_{N(t)+1} - t$ la vida residual en el tiempo t. Supondremos $X_n \in L^2(\mathbb{P})$, con $\mathbb{E}(X_n) = \mu$.

a) Muestre que la media de la vida residual asintótica es $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \mathbb{E}(Y(t)) = \dfrac{\mathbb{E}(X_n^2)}{2\mu}$

b) Concluya que $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} m(t) - \frac{t}{\mu} = \dfrac{\mathbb{E}(X_n^2)}{2\mu^2} - 1$