Clase Auxiliar N°4: Procesos de Markov

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

23 de abril del 2010

P1. Demuestre que $d(i) = \text{mcd}\{n > 0 : f_{ii}^{(n)} > 0\}$

P2. Recordemos que un estado i se dice no esencial si $\exists j \in I$ tal que $i \rightarrow j$ pero $j \not\rightarrow i$.

- a) Demuestre que si $i \rightarrow j$, con $i \neq j$ entonces $\mathbb{P}_i(\tau_j < \infty) > 0$
- b) Demuestre que si i es no esencial entonces i es transiente.
- c) Sean $i \neq j$. Demuestre que $\mathbb{P}_i(N_j = \infty) = \mathbb{P}_i(\tau_j < \infty)\mathbb{P}_j(N_j = \infty)$
- d) Sea $I = \{0, 1, \dots, n\}$ y $0 < p < 1$ Considere la cadena con matriz de transición

$$P_{ij} = \begin{cases} p & j = i + 1 \\ 1 - p & j = 0 \\ 0 & \sim \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq i \leq n - 1, \text{ y } P_{nn} = 1$$

Clasifique los estados de la cadena. Demuestre que dado cualquier n , con probabilidad 1 se necesita una cantidad finita de lanzamientos de moneda (cargada) para obtener n caras consecutivas.

P3. Cadenas de nacimiento y muerte

En este caso $I = \mathbb{N}$ y la matriz de transición es

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i - j| > 1 \\ p_i & \text{si } j = i + 1 \\ r_i & \text{si } j = i \\ q_i & \text{si } j = i - 1 \end{cases} \quad \text{con } p_i + q_i + r_i = 1, q_0 = p_{-1} = 0, \forall i \in \mathbb{N}$$

a) Asumamos que $p_i > 0 \forall i \in \mathbb{N}, q_i > 0 \forall i \geq 1$. Demuestre que la cadena es irreducible y es de período 2 si $\forall i \in \mathbb{N} r_i = 0$, y de lo contrario es de periodo 1.

b) Demuestre que la cadena es recurrente ssi $\sum_{r=1}^{\infty} \prod_{l=1}^r \frac{q_l}{p_l} = \infty$

P4. Ó la tragedia del “El astronauta ebrio”

Consideremos el paseo aleatorio simétrico en $I = \mathbb{Z}^3$. Es decir, la matriz de transición es la siguiente:

$$P_{\vec{i}, \vec{j}} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } |\vec{i} - \vec{j}| = 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Demuestre que el paseo es irreducible de periodo 2 y transiente.

Indicación Puede ser útil usar la fórmula de Stirling, que dice $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1$ y que si a_n, b_n son dos sucesiones positivas tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ entonces para cualquier sucesión positiva c_n se tiene $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n c_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n c_n < \infty$