

MA400-1 Variable Compleja y Funciones Especiales. Semestre 2010-01

Profesor: Axel Osses

Auxiliar: Cristóbal Quiñinao

Tarea I

3 de mayo de 2010

Preliminares

1. Pruebe que la distancia cordal entre 2 puntos $z, w \in \mathbb{C}$ está dada por

$$d(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

donde se entiende por la distancia cordal, el largo de la curva más corta entre las imágenes en la esfera estereográfica. ¿Cuál sería $d(z, \infty)$?

2. Considere la matriz circulante

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Pruebe que (λ, v) es un par propio de A ssi $\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \rho^k$, donde ρ es una raíz n -ésima de la unidad y

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \\ \rho^2 \\ \vdots \\ \rho^{n-1} \end{pmatrix}$$

Transformaciones de Möbius

1. Encontrar todas las Transformaciones de Möbius de $B(0, 1)$ en sí misma (Ver Clase Auxiliar I).
2. Encuentre una transformación conforme biyectiva entre la región $D = B(0, 1) \cap B(i, 1)$ y el semiplano

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

Ind.: Utilizar una transformación de Möbius f que transforme el arco inferior de la frontera en una recta y analizar que hace f con el arco superior de la frontera. La transformación pedida no es de Möbius.

Funciones Analíticas

1. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, U abierto, $f(U) \subset V$, V abierto. Sea $g : V \rightarrow U$ tal que

$$f(g(w)) = w, \quad \forall w \in V.$$

Si f es diferenciable compleja en $z_0 = g(w_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ y g es continua en w_0 demostrar que g es diferenciable compleja en w_0 y

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

2. Si $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(U) = V$, con U, V abiertos. Se dice que $g : V \rightarrow U$ es rama de f^{-1} , si g es continua en V y si $f(g(w)) = w$, $\forall w \in V$.

Encuentre una rama de $\log(\cdot)$ y usando la parte anterior prueba que esta rama es analítica y calcule la derivada.

3. Encuentre las ramas de $\arccos(\cdot)$ y de $\sqrt{z}$.

Series de Potencias

1. (Criterio de Leibniz) Sea $a_n \in \mathbb{C}, \{r_n\} \subset [0, \infty)$ decreciente a cero. Sea $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$, sucesión de sumas parciales, que cumplen

$$\exists M > 0, \forall N \geq 0 \quad \left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq M$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n$ converge.

2. (Aplicación del Teorema de Abel) Considere

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

Probar que el radio de convergencia es $R = 1$, y que $f(z) = \log(1+z)$, donde $\log(\cdot)$ es la rama principal del logaritmo.

Usando el Teorema de Abel encontrar series para $\log(2)$ y π tomando $z_k = i \left(1 - \frac{1}{k}\right) \rightarrow i$.

Ind.: Muestre que $(f(z) - \log(1+z))' = 0$ y use uno de los resultados de la Auxiliar II para concluir.

3. Sea $R > 0$ el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Considere que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-kn} = 0$$

probar que $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$.

Integración

1. Demuestre las siguientes igualdades

$$\blacksquare \mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi \xi^2}.$$

$$\blacksquare \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

2. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $\forall \gamma$ curva regular por pedazos cerrada en Ω se tiene que $\oint f(z) dx = 0$ demostrar que f tiene primitiva en Ω .