La paradoja de Banach-Tarski

R. Cominetti*

Resúmen. En 1924, Banach y Tarski probaron que la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ se puede subdividir en un número finito de partes las cuales, debidamente rotadas y trasladadas, se pueden re-ensamblar para formar 2 esferas unitarias. El mismo tipo de subdivisiones "paradójicas" permiten transformar la bola unitaria en una bola de radio arbitrario, o más generalmente en un conjunto acotado con interior no vacío cualquiera. En esta nota se presenta la demostración de estos resultados descrita en [2].

1 Conjuntos paradójicos

Informalmente decimos que un conjunto es "paradójico" si se puede subdividir en un número finito de trozos los cuales, debidamente re-ensamblados, generan 2 copias idénticas del conjunto original. Para precisar esta noción, consideremos un conjunto X y un grupo G de transformaciones de X en sí mismo. La operación en G es la composición habitual de funciones (denotamos gf la composición de g con f) y el neutro es la función identidad (que denotamos por 1). Todo elemento en G posee un inverso y es por lo tanto una biyección (g^{-1} denota la función inversa de g).

Definición 1.1
(a) $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se dicen G-equi-descomponibles*, lo cual se denota $A \stackrel{G}{\sim} B$, si existen particiones finitas $\{A_i\}_{i=1}^n$ y $\{B_i\}_{i=1}^n$ de A y B respectivamente, y elementos $g_i \in G$ tales que $B_i = g_i(A_i)$.*
(b) $S \in \mathcal{P}(X)$ se dice G-paradójico *si existen subconjuntos $A, B \subseteq S$ disjuntos tales que $A \stackrel{G}{\sim} S \stackrel{G}{\sim} B$.*

Notemos que si G es el grupo de todas las biyecciones de X entonces $\stackrel{G}{\sim}$ se reduce a la equipotencia y X es paradójico ssi es de cardinal infinito. Por su parte, el resultado de Banach-Tarski establece el hecho más sorprendente de que la bola unitaria de $\mathbb{R}^3$ puede duplicarse usando exclusivamente isometrías, a pesar de que éstas preservan volúmen (la subdivisión debe ser por lo tanto no-medible). Probar la equi-descomponibilidad directamente a partir de la definición resulta en general complicado. Por ello conviene establecer en primer término algunos resultados generales que facilitan la tarea. Comencemos por observar que la equi-descomponibilidad define una relación de equivalencia sobre $\mathcal{P}(X)$ la cual satisface adicionalmente

$$(H)\quad \begin{cases} (a)\;\; \text{Si } A = A_1 \cup A_2 \text{ y } B = B_1 \cup B_2 \text{ con } A_1 \sim B_1 \text{ y } A_2 \sim B_2 \text{ entonces } A \sim B. \\ (b)\;\; \text{Si } A \sim B \text{ entonces existe una biyección } f : A \to B \text{ tal que } C \sim f(C) \text{ para todo } C \subseteq A. \end{cases}$$

Usando esta propiedad se puede demostrar que para establecer $A \sim B$ es suficiente probar que cada conjunto es equivalente a un subconjunto del otro. Para precisar este resultado notemos que a toda

*Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathcal{P}(X)$ se le puede asociar una nueva relación $\preceq$ definida mediante

$$A \preceq B \Leftrightarrow [A \sim B' \text{ para algún } B' \subseteq B].$$

Claramente si $A \subseteq B$ entonces $A \preceq B$, y además bajo la hipótesis $(H)(b)$ se tiene que la relación $\preceq$ es transitiva. El resultado más útil enunciado previamente es el siguiente.

Teorema 1.1 (Banach-Schröder-Bernstein) *Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre $\mathcal{P}(X)$ la cual satisface la propiedad (H). Si $A \preceq B$ y $B \preceq A$ entonces $A \sim B$.*

Demostración. Supongamos $A \preceq B$ y $B \preceq A$ de modo tal que existen conjuntos $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$ con $A \sim B'$ y $B \sim A'$. Escojamos biyecciones $f : A \to B'$ y $g : B \to A'$ con la propiedad $(H)(b)$ y definamos el conjunto

$$A_1 = \{(g \circ f)^n(z) : z \in A \setminus A', n \in \mathbb{N}\}.$$

En virtud de $(H)(b)$, el conjunto $B_1 = f(A_1)$ es tal que $A_1 \sim B_1$. Del mismo modo, definiendo $B_2 = B \setminus B_1$ y $A_2 = g(B_2)$ tenemos $A_2 \sim B_2$. Dado que obviamente se tiene $B = B_1 \uplus B_2$, la conclusión $A \sim B$ se obtendrá de $(H)(a)$ si establecemos que $A = A_1 \uplus A_2$.

Para verificar que A_1 y A_2 son disjuntos notemos que si $x \in A_1 \cap A_2$ entonces se puede escribir en la forma $x = (g \circ f)^n(z)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $z \in A \setminus A'$, y simultáneamente como $x = g(y)$ para algún $y \in B_2$. De esto último se sigue que $x \in g(B) = A'$ y como $z \notin A'$ se deduce que $n \neq 0$. Por consiguiente tenemos $x = g(f(x'))$ con $x' = (g \circ f)^{n-1}(z) \in A_1$ con lo cual $x = g(f(x')) = g(y)$ y de aquí $y = f(x') \in B_1$ conduciendo al absurdo $y \in B_1 \cap B_2 = \phi$. Esto prueba que $A_1 \cap A_2 = \phi$.

Probemos ahora que $A = A_1 \cup A_2$. Para ello tomemos $x \in A \setminus A_1$. De la definición de A_1 se tiene necesariamente $x \in A'$ y por lo tanto existe $y \in B$ tal que $x = g(y)$. Dicho y no puede estar en B_1 pues en tal caso se tendría $y = f((g \circ f)^n(z))$ para algún $z \in A \setminus A'$ y $n \in \mathbb{N}$, de donde resultaría que $x = (g \circ f)^{n+1}(z) \in A_1$ contradiciendo la elección de x. En consecuencia $y \in B_2$ de donde obtenemos $x = g(y) \in g(B_2) = A_2$. Esto establece que $A_1 \cup A_2 = A$ lo cual completa la demostración. ■

Este Teorema tiene una interesante consecuencia: los conjuntos A y B en la definición de conjunto paradójico pueden tomarse como una partición de S.

Corolario 1.1 *S es G-paradójico ssi existe una partición $S = A \uplus B$ con $A \overset{G}{\sim} S \overset{G}{\sim} B$.*

Demostración. Basta probar la implicación directa. Sean $A, B \subseteq S$ disjuntos con $A \overset{G}{\sim} S \overset{G}{\sim} B$. Dado que $S \overset{G}{\sim} B \subseteq B' \triangleq (S \setminus A)$ se tiene $S \preceq B'$ y puesto que obviamente $B' \preceq S$, el teorema anterior implica $S \overset{G}{\sim} B'$. Así $A \overset{G}{\sim} S \overset{G}{\sim} B'$ con $S = A \uplus B'$. ■

Las descomposiciones paradójicas que veremos más adelante se basan sobre el siguiente ejemplo. Recordemos que un grupo cualquiera G actúa sobre sí mismo mediante composición a la izquierda.

Teorema 1.2 *Si G es un grupo libre con dos generadores σ y τ, entonces G es G-paradójico.*

Demostración. Denotemos por $W(\rho)$ el conjunto de elementos de G que comienzan por el símbolo ρ, de modo que G puede particionarse como $G = \{1\} \uplus W(\sigma) \uplus W(\sigma^{-1}) \uplus W(\tau) \uplus W(\tau^{-1})$. Claramente $G = W(\sigma) \uplus \sigma W(\sigma^{-1})$ y análogamente $G = W(\tau) \uplus \tau W(\tau^{-1})$, lo cual prueba la equi-descomponibilidad de G con $A = W(\sigma) \uplus W(\sigma^{-1})$ así como con $B = W(\tau) \uplus W(\tau^{-1})$. ■

Un grupo paradójico respecto de sí mismo induce particiones paradójicas en otros conjuntos sobre los cuales actúa. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3 *Sea G un grupo G-paradójico actuando sobre un conjunto X, y tal que los elementos $g \in G \setminus \{1\}$ no tienen puntos fijos en X. Entonces X es G-paradójico.*

Demostración. Escojamos una partición $\{A_i\}_{i=1}^n \cup \{B_j\}_{j=1}^m$ de G y elementos del grupo $g_i, h_j \in G$ tales que $G = \cup_{i=1}^n g_i A_i = \cup_{j=1}^m h_j B_j$. Consideremos en X la relación de equivalencia definida por $x\mathcal{R}y$ ssi $x = g(y)$ para algún $g \in G$, y escojamos un representante de cada clase para formar un subconjunto $M \subseteq X$. La inexistencia de puntos fijos no triviales implica que la familia $\{g(M)\}_{g \in G}$ es una partición de X. Definiendo $A_i' = \cup\{g(M) : g \in A_i\}$ y $B_j' = \cup\{g(M) : g \in B_j\}$ obtenemos una partición finita de X tal que $X = \cup_{i=1}^n g_i(A_i') = \cup_{j=1}^m h_j(B_j')$ lo cual prueba que X es G-paradójico. ∎

2 Conjuntos paradójicos usando isometrías

Sea G_n el grupo de isometrías de $X = \mathbb{R}^n$. Recordemos que toda isometría de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal afín, esto es, una isometría lineal seguida de una translación. Las isometrías lineales $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, caracterizadas por $A^t A = I$, constituyen un subgrupo O_n llamado subgrupo ortogonal, el cual junto con actuar sobre $X = \mathbb{R}^n$ también actúa sobre la esfera y la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$. El subgrupo ortogonal especial SO_n corresponde a las isometrías lineales $A \in O_n$ que preservan la orientación, vale decir $\det(A) = 1$. Más específicamente, en el caso de $\mathbb{R}^2$ el grupo SO_2 está formado exclusivamente por las rotaciones, mientras que O_2 incluye además las reflexiones respecto de rectas que pasan por el orígen. Para el caso de $\mathbb{R}^3$ todo elemento $A \in SO_3$ admite el valor propio 1 y corresponde por lo tanto a una rotación en torno al eje definido por el vector propio correspondiente.

Teorema 2.1 *Existen rotaciones $\sigma, \tau \in SO_3$ que generan un subgrupo libre de SO_3.*

Demostración. Sean $\sigma, \tau \in SO_3$ las rotaciones en un ángulo $\arccos(1/3)$ en torno a los ejes z y x respectivamente, para las cuales se tiene explícitamente

$$\sigma^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tau^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Debemos probar que todo w obtenido mediante composiciones sucesivas de $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$ y τ^{-1} es distinta de la identidad. Suponemos que w está en forma reducida (*i.e.* se han eliminado todas las sub-expresiones del tipo $\rho\rho^{-1}$) y denotamos por $|w|$ la cantidad de factores que intervienen en w. Notemos además que, usando las conjugaciones $w \rightsquigarrow \tau w \tau^{-1}$ y $w \rightsquigarrow \tau^{-1} w \tau$, no perdemos generalidad al suponer que w comienza por la derecha con σ o bién σ^{-1}. Razonaremos inductivamente sobre el largo $|w|$ mostrando que $w(x) \neq x$ para $x = (1, 0, 0)^t \in S^2$, de lo cual se sigue la conclusión deseada $w \neq 1$.

Probaremos que $w(x) = \frac{1}{3^{|w|}}(a, b\sqrt{2}, c)^t$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y b no divisible por 3 (en particular $b \neq 0$ y por consiguiente $w(x) \neq x$). Claramente $w(x)$ es de esta forma si $|w| = 1$, vale decir en los casos $w = \sigma$ y $w = \sigma^{-1}$. Por otra parte, al aplicar $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$ o τ^{-1} a un vector de la forma $\frac{1}{3^k}(a, b\sqrt{2}, c)^t$ se obtiene el vector $\frac{1}{3^{k+1}}(a', b'\sqrt{2}, c')^t$ con $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ dados por

$$\begin{cases} a' = a \mp 4b \; ; \; b' = b \pm 2a \; ; \; c' = 3c & \text{para } \sigma^{\pm 1}, \\ a' = 3a \; ; \; b' = b \mp 2c \; ; \; c' = c \pm 4b & \text{para } \tau^{\pm 1}. \end{cases} \tag{1}$$

Veamos que b nunca es divisible por 3. Para $|w| = 1$ y $|w| = 2$ ello se verifica de manera directa. Sea $k \geq 2$ tal que la propiedad vale para todo w con $|w| \leq k$. Sea w con $|w| = k+1$ y sean $\rho_1, \rho_2 \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ las dos primeras operaciones de modo que $w = \rho_1\rho_2\tilde{w}$ con $|\tilde{w}| = k-1$. Denotando $\tilde{w}(x) = \frac{1}{3^{k-1}}(a, b\sqrt{2}, c)$, $\rho_2\tilde{w}(x) = \frac{1}{3^k}(a', b'\sqrt{2}, c')$ y $\rho_1\rho_2\tilde{w}(x) = \frac{1}{3^{k+1}}(a'', b''\sqrt{2}, c'')$, tenemos por hipótesis de inducción que b' no es divisible por 3. Usando (1) y distinguiendo los casos posibles (notar que ρ_1 y ρ_2 no pueden ser uno el inverso del otro pues w está en forma reducida) obtenemos

$$b'' = \begin{cases} b' \pm 6a & \text{si } \rho_1 = \sigma^{\pm 1}, \rho_2 = \tau^{\pm 1} \\ b' \pm 6c & \text{si } \rho_1 = \tau^{\pm 1}, \rho_2 = \sigma^{\pm 1} \\ 2b' - 9b & \text{si } \rho_1 = \rho_2 \end{cases}$$

de modo que b'' tampoco es divisible por 3, lo cual completa la etapa de inducción. ■

Teorema 2.2 *Sea $G \subseteq SO_3$ un subgrupo libre con 2 generadores y sea $D \subseteq S^2$ el conjunto de todos los puntos fijos de los elementos $g \in G \setminus \{1\}$. Entonces D es numerable, G actúa sobre $S' = S \setminus D$, y S' es G-paradójico.*

Demostración. Cada rotación $\sigma \in SO_3 \setminus \{1\}$ deja fijo un eje y tiene por lo tanto exactamente 2 puntos fijos en S^2. Dado que G es numerable se sigue que D es numerable. Para ver que G actúa sobre S' observamos que si $x \in S'$ y $g \in G$ son tales que $g(x) \notin S'$, entonces $g(x) \in D$ y existirá $h \in G \setminus \{1\}$ tal que $h(g(x)) = g(x)$. De aquí resulta $g^{-1}hg(x) = x$ y como $x \notin D$ obtenemos $g^{-1}hg = 1$, de donde $hg = g$ y por lo tanto $h = 1$ lo cual es una contradicción. Finalmente, dado que G actúa sobre S' sin puntos fijos no triviales, los Teoremas 1.2 y 1.3 implican que S' es G-paradójico. ■

Teorema 2.3 *Si $D \subseteq S^2$ es numerable entonces $S^2 \overset{SO_3}{\sim} (S^2 \setminus D)$.*

Demostración. Escojamos un vector $v \in (S^2 \setminus D)$ y denotemos por ρ_θ la rotación en un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ en torno al eje v. Para cada $x \in D$ sea Θ_x el conjunto de ángulos $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que $\rho_\theta^k(x) \in D$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Cada Θ_x es numerable y por lo tanto $\Theta \triangleq \cup_{x \in D}\Theta_x$ es también numerable. Escogiendo un ángulo $\theta \in [0, 2\pi) \setminus \Theta$ tenemos que los conjuntos $\{\rho_\theta^k(D)\}_{k \in \mathbb{N}}$ son disjuntos de a pares. Tomando $A = \cup_{k=0}^{\infty}\rho_\theta^k(D)$ obtenemos $\rho_\theta(A) = A \setminus D$, con lo cual

$$S^2 = (S^2 \setminus A) \cup A \overset{SO_3}{\sim} (S^2 \setminus A) \cup \rho_\theta(A) = S^2 \setminus D.$$

■

Teorema 2.4 (Banach-Tarski) *La esfera unitaria $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es SO_3-paradójica.*

Demostración. Los Teoremas 2.2 y 2.3 implican que S^2 es SO_3-equi-descomponible con un conjunto SO_3-paradójico $S' \subseteq S^2$, y por consiguiente S^2 es SO_3-paradójico. ■

Teorema 2.5 (Banach-Tarski) *La bola unitaria $B \subseteq \mathbb{R}^3$ es G_3-paradójica.*

Demostración. La descomposición de S^2 permite construir una descomposición de $B \setminus \{0\}$ usando una correspondencia radial $x \mapsto \{\alpha x : 0 < \alpha \leq 1\}$. Por lo tanto basta probar que $B \overset{G_3}{\sim} B \setminus \{0\}$. Para ello basta considerar $\rho_\theta \in G_3$ una rotación en torno al eje vertical que pasa por el punto $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ con un ángulo θ racionalmente independiente de 2π. Tomando $N = \{\rho_\theta^k(0) : k \in \mathbb{N}\} \subseteq B$ obtenemos

$$B = (B \setminus N) \cup N \overset{G_3}{\sim} (B \setminus N) \cup \rho_\theta(N) = B \setminus \{0\}.$$

■

Es fácil ver que el Teorema 2.4 se aplica a toda esfera centrada en el orígen independiente de su radio, mientras que el Teorema 2.5 se aplica a cualquier bola. Usando este último resultado se obtiene la siguiente versión más fuerte.

Teorema 2.6 (Banach-Tarski) *Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ son acotados con interior no vacío entonces $A \overset{G_3}{\sim} B$.*

Demostración. En virtud del Teorema 1.1 basta probar $A \preceq B$. Tomemos una bola B_1 tal que $A \subseteq B_1$ y una bola $B_2 \subseteq B$. Usando el Teorema 2.5 reiteradamente para obtener réplicas de B_2 y utilizando traslaciones apropiadas podemos cubrir B_1 mediante copias (traslapadas) de B_2. A partir de aquí se deduce facilmente que $B_1 \preceq B_2$ y usando la transitividad de $\preceq$ se concluye $A \preceq B$. ■

References

[1] S. Banach S. & A. Tarski, "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents", *Fund. Math.* **6** (1924), 244–277.

[2] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambrigde University Press, New York, New York (1985).