Control 1 – Análisis

Profesor: Roberto Cominetti
Auxiliares: Andrés Fielbaum, Francisco Unda

Pregunta 1.

(a) Sea $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ la familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Para $A, B \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ sea

$$\Omega_{A,B} = \{J \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \subseteq J, B \cap J = \emptyset\}$$

- i)* Mostrar que $\{\Omega_{A,B} : A, B \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})\}$ es base de una topología $\mathcal{T}_F$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
 - ii)* Mostrar que $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ es denso en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ para la topología $\mathcal{T}_F$.
- (b) Para $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definimos $d(A, B) = 1/(1 + m_{AB})$ donde $m_{AB} = \min(A \Delta B)$ con la convención $\min \emptyset = \infty$. Recuerde que la diferencia simétrica de dos conjuntos es $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, y observe que $A \cap [0, m_{AB}) = B \cap [0, m_{AB})$.
- iii)* Pruebe que d es una ultramétrica sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
 - iv)* Pruebe que $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $\psi(A) = A^c$ es una isometría (*i.e.* $d(\psi(A), \psi(B)) = d(A, B) \forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$) y deduzca que ψ es continua.
 - v)* Sea $B \subseteq \mathbb{N}$ fijo. Defina $f_B, g_B : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ por $f_B(A) = A \cap B, g_B(A) = A \cup B$. Pruebe que ambas son no-expansivas ($d(h(x), h(y)) \leq d(x, y)$) y deduzca que son continuas.
 - vi)* Sea $B \subseteq \mathbb{N}$ fijo. Pruebe que $\mathcal{R}_B = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : B \subseteq A\}$ es cerrado. Pruebe que si B es finito, entonces $\mathcal{R}_B$ es también abierto.
 - vii)* Mostrar que $\mathcal{T}_F = \mathcal{T}_d$.

Pregunta 2. Sea (X, τ) e.t. Hausdorff y $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de X en $[0, 1]$.

- (a) Pruebe que $\Psi : X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$ definida por $\Psi(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{F}}$ es continua al dotar a $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ de la topología producto.
- (b) Suponga que para todo cerrado $F \subseteq X$ y $x \notin F$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = 1$ y f es nula sobre F . Pruebe que X es homeomorfo a $\Psi(X)$.
- (c) Pruebe que si $\mathcal{F}$ es además numerable, entonces (X, τ) es metrizable.

Pregunta 3.

- (a) Muestre que un espacio métrico (X, d) es separable ssi satisface el segundo axioma de numerabilidad.
- (b) Sea $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico que verifica el segundo axioma de numerabilidad. Muestre que $|\mathcal{T}| \leq c$. Concluya que todo espacio métrico separable tiene cardinal menor o igual que c .
- (c) Muestre que lo anterior no es cierto si el espacio no es métrico.

Indicación: Considere $[0, 1]^{\mathbb{R}}$ con la topología producto y construya una familia densa numerable de funciones constantes por pedazos.