Uch/Fcfm/Dim - MA3701 Optimización
Profesor: Jorge Amaya.
Auxiliares: Sergio Araneda y Franco Basso.
1 de abril de 2010

Auxiliar1: Conjuntos Convexos, Poliedros, Puntos extremos.

P1 Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama cono si

$$(\forall x, y \in C)(\forall \lambda, \mu \geq 0)\lambda x + \mu y \in C$$

Es fácil ver que todo cono es convexo.
Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n, D = \{d_1, \ldots, d_k\}$ un conjunto l.i.

a) Muestre que el conjunto $C_D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0)x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i d_i\}$ Es cono. (y por lo tanto convexo).
Un cono de esta forma se le llama finitamente generado.
Un Cono es poliedral si existe una matriz A tal que $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$.
El teorema de Farkas-Minkowski-Weil dice que un cono es poliedral ssi es finitamente generado. (intente demostrarlo!)

b) Un conjunto Q es un polítopo si es la envoltura convexa de un número finito de puntos. Muestre que un polítopo es un conjunto convexo.

c) Un conjunto P es un poliedro si $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ Para alguna matriz A y vector b. La idea de este problema es demostrar que para todo poliedro P existe un politopo Q y un cono C tal que $P = Q + C$.
Para ello Muestre que el siguiente conjunto es un cono poliedral.

$$R = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}, \lambda \geq 0 \mid Ax - \lambda b \leq 0\}$$

Explicite la matriz que define al cono.

d) Por el teorema de Farkas-Minkowski-Weil el conjunto anterior es finitamente generado. Sea $G = \{(x_1, \lambda_1), \ldots, (x_m, \lambda_m)\}$ un conjunto de vectores que lo generan. Definimos:

$$Q = co(\{\frac{x_i}{\lambda_i} \mid \lambda_i \neq 0\})$$

$$C = C_{G'}, G' = \{x_i \mid \lambda_i = 0\}$$

Muestre que C es un cono y que Q es un polítopo, y que ambos son subconjuntos de R. Concluya.

e) Muestre que todo poliedro acotado es un polítopo.

bonus Intente mostrar el converso, si P es la suma de un polítopo con un cono poliedral entonces P es un poliedro.

P2 Sea A una matriz simétrica semidefinida positiva (es decir, $(\forall x \in \mathbb{R}^n) x^t A x \geq 0$). Demuestre que si A es semidefinida positiva entonces el conjunto

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x \leq \alpha\}$$

es convexo para cada α.

P3 Sea $C = co(S)$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Muestre que todo punto extremo de C debe estar en S.

P4 Sea C un convexo. Muestre que $x \in C$ es un punto extremo de C ssi $C \setminus \{x\}$ es convexo.

P5 Sea en $\mathbb{R}^n$ las bolas unitarias con la norma del supremo y la norma 1, es decir:

$$B_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n \mid max_{i=1..n} \mid x_i \mid \leq 1\}$$

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1..n} \mid x_i \mid \leq 1\}$$

Cuáles son los puntos extremos de estos conjuntos?

P6 Sea el poliedro P en $\mathbb{R}^4$ generado por las siguientes restricciones

$$x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 + 3x_3 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \ldots x_4 \geq 0$$

Encuentre los puntos extremos de este poliedro.