P1

i)

PDQ:

$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y) \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)$$
$$\max\{c_1^T(\lambda x+(1-\lambda)y)+b_1,\dots,c_m^T(\lambda x+(1-\lambda)y)+b_m\}$$
$$\max\{c_1^T\lambda x+c_1^T(1-\lambda)y+b_1,\dots,c_m^T\lambda x+c_m^T(1-\lambda)y+b_m\}$$
$$\max\{c_1^T\lambda x+c_1^T(1-\lambda)y+\lambda b_1+\ (1-\lambda)b_1,\dots,c_m^T\lambda x+c_m^T(1-\lambda)y+\lambda b_m+\ (1-\lambda)b_m\}$$
$$\max\{\lambda(c_1^Tx+b_1)+(1-\lambda)(c_1^Ty+\ b_1),\dots,\lambda(c_m^Tx+b_m)+(1-\lambda)(c_m^Ty+\ b_m)\}$$

Luego, sea k tal que:

$$\max\{\lambda(c_1^Tx+b_1)+(1-\lambda)(c_1^Ty+\ b_1),\dots,\lambda(c_m^Tx+b_m)+(1-\lambda)(c_m^Ty+\ b_m)\}$$
$$=\lambda(c_k^Tx+b_k)+(1-\lambda)(c_k^Ty+\ b_k)$$

Luego, es claro que:

$$c_k^Tx+b_k \leq \max\{c_1^Tx+b_1,\dots,c_m^Tx+b_m\}=\varphi(x)$$
$$c_k^Ty+b_k \leq \max\{c_1^Ty+b_1,\dots,c_m^Ty+b_m\}=\varphi(y)$$

Por lo tanto:

$$\lambda(c_k^Tx+b_k)+(1-\lambda)(c_k^Ty+\ b_k) \leq \lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$$
$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$$

Entonces φ es convexa.

El conjunto factible es $\mathbb{R}^n$, luego claramente es convexo.

ii)
Consideremos el siguiente problema de Programación Lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(PL)} & \min \quad z \\
\text{s.a.} & z \geq c_1^T x + b_1 \\
 & z \geq c_2^T x + b_2 \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & z \geq c_m^T x + b_m
\end{array}
$$

Observar que se agregó una nueva variable ($z \in \mathbb{R}$) además de las n anteriores ($x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$). Luego es claro que el z que se obtendrá será igual a $\max\{c_1^T x + b_1, \dots, c_m^T x + b_m\}$ y el mínimo de todos los máximos posibles.

Es equivalente al problema anterior en el sentido que, el vector x que se obtenga será el mismo que el anterior, y el valor para z será el mismo que se tendría para la función objetivo $\varphi(x)$.

Claramente la función objetivo es lineal y las restricciones también.