

Pauta Examen Probabilidades y Estadística - Otoño 2010

Profesor: Fernando Lema

Auxiliares: Abelino Jiménez - Juan Carlos Piña

Pregunta 3.

X_A = número de personas que suben al tren A

X_B = número de personas que suben al tren B

como $X_A + X_B = N \implies X_B = N - X_A$

modelamos la elección de cada persona i si elige el tren A (X^i_A) como un experimento de Bernoulli de parámetro $p=1/2$ donde $X^i_A = 1$ si la persona i toma el tren A (probabilidad $1/2$) y $X^i_A = 0$ en caso contrario. Luego:

$$E(X^i_A) = p = 1/2$$

$$\text{Var}(X^i_A) = p(1-p) = 1/4$$

Al ser $X_A = \sum_{i=1}^N X^i_A$, una distribución Binomial de parámetros N y $p=1/2$ para N grande :

$$X_A \rightarrow N(E(\sum_{i=1}^N X^i_A), \text{Var}(\sum_{i=1}^N X^i_A))$$

$$X_A \rightarrow N(\sum_{i=1}^N E(X^i_A), \sum_{i=1}^N \text{Var}(X^i_A)) \implies X_A \rightarrow N(N/2, N/4)$$

Condiciones para que todos los pasajeros viajen sentados:

$$X_A \leq m, X_B \leq m \implies N-m \leq X_A \leq m$$

Queremos finalmente para N grande

$$P(\text{todos viajen sentados}) = 0.99, \text{ ie:}$$

$$P(N-m \leq X_A \leq m) = 0.99$$

$$P\left(\frac{(N-m)-N/2}{\sqrt{N/4}} \leq Z_A \leq \frac{m-N/2}{\sqrt{N/4}}\right) = 0.99, \text{ donde } Z_A \rightarrow N(0,1)$$

La probabilidad anterior se traduce a:

$$(1) P\left(-\frac{2m-N}{\sqrt{N}} \leq Z_A \leq \frac{2m-N}{\sqrt{N}}\right) = 0.99$$

lo cual es un intervalo simétrico, de esta forma, negando (1):

$P(Z_A < -\frac{2m-N}{\sqrt{N}} \cup Z_A > \frac{2m-N}{\sqrt{N}}) = 0.01$ por la simetría, la expresión anterior equivale con:

$$P(Z_A < -\frac{2m-N}{\sqrt{N}}) = (0.01)/2 = 0.005$$

y reemplazando en la tabla normal estándar:

$$-\frac{2m-N}{\sqrt{N}} \simeq -2.8 \implies m \simeq 1.29\sqrt{N} + N/2$$