Control 2 - Probabilidades y Estadística - Otoño 2010

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez
Juan Carlos Piña

Pregunta 1.

a) Sean X,Y v.a. con densidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & si \ \ 0 < x < \infty,\, 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

i.- ¿Son X,Y independientes?

ii.-Sean Z=$\frac{X}{X+Y}$, W=$X+Y$

Usando Teorema de cambio de variable determine las densidades marginales de Z y W.

iii.-¿Son Z,W independientes? Calcular Var(Z).

b) Sean X,Y v.a. continuas e independientes, muestre que

$$P(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy$$

Evalúe si X e Y son exponenciales de parámetros λ_1,λ_2 respectivamente.

Pregunta 2.

a) Considere el siguiente experimento

- Se selecciona un círculo con centro en (0,0), de radio R, donde R es una v.a. con densidad $f_R(r) = e^{-r}$, $r > 0$

- Dentro del círculo anterior se selcciona al azar un punto (x, y), definiendo $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$

i.-Calcule $E(D)$

ii.-Considerando ahora sólo los círculos con radio superior a 2, determine la densidad de la v.a. área.

b) i.-En un juego existen 2 cajas (A y B), A contiene 10 fichas blancas y x fichas negras, B contiene x fichas blancas y 10 fichas negras. El juego consiste en sacar una carta de un mazo de cartas común, si sale un AS se saca una ficha de la caja A, en caso contrario se extrae la ficha de B.

Si la ficha extraída es blanca se obtiene un premio de 4 U.M. y si es negra 0 U.M. El juego tiene un costo de 1U.M. por ficha extraída.

Determine el x a partir del cual el juego es rentable para el dueño (es decir, no sea conveniente para usted, que esta jugando).

ii.- Suponga que x=3, y usted saca 2 fichas(sin reposición) de la caja A, Se define

U=1 si la primera ficha es negra , 0 si no

V=1 si la segunda ficha es negra , 0 si no

Sacar la covarianza entre ambas variables.

Pregunta 3.

a) Sea X v.a. $H(X) = e^{tX}$, $t \epsilon \mathbb{R}$ fijo, se define la función generadora de momentos (f.g.m.) como

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

i.-Calcule $M_X(t)$ si X$\rightarrow B(n,p)$

ii.-Determine $\frac{\partial^n M_X(t)}{\partial t^n} |_{t=0}$

iii.-Si X,Y v.a. independientes , en f.g.m: $M_X(t)$,$M_Y(t)$ y sea $Z = X + Y$, determine $M_Z(t)$ en función de $M_X(t)$ y $M_Y(t)$.

b) Un juego de lotería sortea un premio de $G y cada boleto cuesta $C, la probabilidad de ganar en un sorteo es p, y usted está dispuesto a jugar hasta ganar.

i.-Calcule la probabilidad que usted termine con un saldo no negativo.

ii.-Calcule el saldo esperado.

Tiempo: 3 horas.