Pauta P3

(a)

$$\mathcal{L}(\lambda, x_1, ..., x_n) = \lambda^n e^{-\lambda(\sum X_i - nc)} \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n - c}$$

$$\mathcal{L}(c, x_1, ..., x_n) = \lambda^n e^{-\lambda(\sum X_i - nc)} \mathbb{1}_{\{\mathrm{X_i > c,\ i=1,...,n}\}}$$

Pero notemos que $\mathcal{L}$ crece con c (excluyendo la indicatriz), por lo tanto para maximizar $\mathcal{L}$ necesitamos el c más pequeño que haga la indicatriz 1, *ie*, $c = \min_i X_i$

Obs: En el primer caso se omite la indicatriz, pero en rigor también debería ir.

(b)

Para decir que $Y = X - c \sim exp(\lambda)$ hay varias maneras, como el teorema de cambio de variables de donde es directo, o simplemente calculando:

$$\mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(X < y + c) = \int_{-\infty}^{y+c} \lambda e^{-\lambda(x-c)} dx = \int_{-\infty}^{y} \lambda e^{-\lambda z} dz = F_{e(\lambda)}(y)$$

Luego, para la esperanza y varianza, notar que

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum Y_i = \bar{Y}_n$$

Por lo que

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \frac{1}{n} \sum \mathbb{E}(Y_i) = \frac{n}{n\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \beta$$
$$\mathbb{V}(\hat{\beta}) = \frac{1}{n^2} \sum \mathbb{V}(Y_i) = \frac{n}{\lambda^2 n^2} = \frac{1}{n\lambda^2} = \frac{\beta^2}{n}$$

(c)

$$\mathbb{P}(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$\circ$$
$$\circ$$
$$\circ$$

$$[\bar{Y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\bar{Y}}{\sqrt{n}}, \bar{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\bar{Y}}{\sqrt[2]{n}}]$$

El procedimiento corresponde a despejar β notando que considerando n grande ($\Rightarrow \hat{\beta} = \bar{Y}$), se tiene: $\mu = \beta$, $\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{n}}$

(d)

Reemplazando los datos en la fórmula anterior se obtiene el intervalo

$$\approx [80.6, 119.4]$$

Por lo que no se puede asegurar que la afirmación de la empresa sea correcta.
Para el máximo nivel de confianza, se debe tener

$$(100 - 10z_{1-\frac{\alpha}{2}}) > 90 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} => 1 \Rightarrow \text{ La confianza maxima es de } 68\%(tabla)$$