Control 3 - Probabilidades y Estadística - Primavera 2009

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Benjamín Palacios

Pregunta 1.

a.- La velocidad (en mts/seg) de un grupo de partículas es una v.a. normal.

i) Si el 50% de las partículas tiene velocidades mayores a 20(mts/seg) y el 16% tiene velocidades menores a 15(mts/seg), determine μ y σ^2.

En adelante suponga $\mu = 21$ y $\sigma^2 = 36$

ii) Si se toman dos partículas independientes, ¿cuál es la probabilidad que sus velocidades difieren en menos de 1(mt/seg)?

iii) Determine n tal que $\mathbb{P}(\mid \overline{X} - \mu \mid < 0,05) = 0,9$

b.- Se disparan dardos en forma uniforme a un disco de radio 3. Si se cae a menos de 1 unidad del centro, se obtiene 5 puntos, si se cae entre 1 unidad y 2 unidades del centro se obtiene 2 puntos; en caso contrario se obtiene 0 puntos.

i) Si U denota la v.a. "puntos obtenidos en un lanzamiento". Determine $\mathbb{E}(U)$ y $Var(U)$.

ii) Si se disparan 50 dardos. Calcule la probabilidad de obtener al menos 65 puntos.

Pregunta 2.

a.- Considere una v.a. $X \sim exponencial(\alpha)$, sea $\theta = 1/\alpha$

i) Se toma una m.a. de tamaño dos, X_1, X_2 y se proponen los siguientes estimadores de θ.

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \widehat{\widehat{\theta}} = \frac{X_1 + X_2}{3}$$

Basado en el criterio del Error Cuadrático medio, determine qué estimador es "preferible".

ii) Se toma una m.a. de tamaño n de X. Determine el EMV de θ y para n grande determine su distribución.

iii) Considere el resultado anterior para construir un intervalo de confianza de θ, con confianza $1 - \alpha = 0,9$

b.- Sea θ la temperatura de un cuerpo (θ desconocido) Se dispone de dos termómetros tal que el primero entrega una temperatura T_1 con $\mathbb{E}(T_1) = \theta$ y $Var(T_1)$ y el segundo una temperatura T_2 con $\mathbb{E}(T_2) = \theta$ y $Var(T_2)$. Sea $T = \alpha T_1 + \beta T_2$. Determine α, β para que T:

i) sea un estimador insesgado de θ.

ii) tenga varianza mínima.

Pregunta 3.

a.- Se sospecha que cierto río está altamente contaminado con bacterias, superando el nivel permitido (que es de 200 por unidad de volumen (UV)). Se toma una muestra de tamaño 10, es decir, se toma 10 UV, contando la cantidad de bacterias y obteniendo:

175	190	215	198	184
207	210	193	196	180

Suponga que la cantidad de bacterias por UV tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$

i) Suponiendo conocido σ^2 ($\sigma^2 = 169$). Determine el intervalo de confianza simétrico para μ con confianza 0,99.

ii) Un estudiante dice que no hay problemas de contaminación ya que había calculado un intervalo de confianza simétrico para μ, obteniendo

$$(190,6\,;\,199)$$

¿Qué confianza tiene ese intervalo?
¿Qué puede concluir de i) y de lo dicho por el estudiante?

iii) Determine un intervalo de confianza del 95% para σ^2.

b.- Sea X v.a. con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta c^\beta}{x^{\beta+1}} & x \geq c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

basado en una m.a $X_1, ..., X_n$

Determine el EMV de β, suponiendo c conocido. Además determine el EMV de c.

Tiempo: 3 horas.