Tarea 3 - Probabilidades y Estadística - Otoño 2010

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Juan Carlos Piña

Pregunta 1.
Sean $X_1 \to N(\mu, \sigma^2)$, $X_2 \to N(\mu, \sigma^2)$, independientes. Considere

$$Z(t) = X_1 cos(wt) + X_2 sen(wt) \qquad V(t) = \frac{\partial Z(t)}{\partial t}$$

i) Determine la distribución de Z(t) y V(t) (t fijo).
ii) Muestre que $\rho_{ZV} = 0$.

Pregunta 2.
Recordando que la distribución beta para la v.a. X equivale a:

$$f(x) = \tfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ 0 < x < 1,\ \Gamma \text{ es la función gamma}$$

1. Si $X \to Be(\alpha, \beta)$ calcule $E(X)$ y $Var(X)$.
2. Sean $Y_1 \to G(\alpha_1, \beta)$, $Y_2 \to G(\alpha_2, \beta)$ v.a. independientes. Muestre que: $U = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2} \to Be(\alpha_1, \alpha_2)$ y que U es independiente de $V = Y_1 + Y_2$.
3. Suponga que la proporción X de artículos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que $X \to Be(\alpha, \beta)$. Si se selecciona al azar un articulo del lote, ¿cual es la probabilidad que sea defectuoso?.

Pregunta 3.
La duración (en horas) de dos aparatos eléctricos son una v.a. (d_1, d_2) con distribución N(43, 36) y N(45, 9) respectivamente.

1. Si usted debe elegir uno de dichos aparatos, ¿cual escogería?
2. Si se instalan dos equipos (uno de cada tipo) de tal forma que uno de ellos funciona cuando el otro falla. Calcule la probabilidad que el sistema total dure mas de 80 hrs.
3. Si se elige solo equipos de tipo d_1 y se instalan de tal forma que el i-ésimo comienza a funcionar cuando el (i-1)-ésimo falla, determine cuantos equipos se deben instalar para que el sistema funcione mas de 750 hrs. con probabilidad 0,99. Asuma independencia en la falla de los equipos

Pregunta 4.

Se considera que el tiempo de reacción frente a un estímulo luminoso es una v.a. T distribuida normalmente con media 0,65 segundos. De acuerdo con los resultados de una investigación se estima que bajo el efecto de cierta dosis de alcohol, el tiempo de reacción frente al mismo estimulo puede expresarse como $T^* = 1,4T - 0,02$. Además, se indica que la probabilidad que un individuo que ha ingerido alcohol, reaccione antes de 1 segundo es de 0,9.

1. ¿Cual es la probabilidad que un sujeto que no ha ingerido alcohol reaccione antes de 0,7 segundos?
2. Si se escogen 10 sujetos en forma independiente que no han ingerido alcohol ¿Cuál es la probabilidad que a lo más 2 reaccionen después de 0,7 segundos?

Pregunta 5.

a) Sea X una v.a. tal que $E(x^k)= 2^k(k+1)!$, $k = 1, 2, 3...$
Determine la distribución de X usando la F.G.M.

b) Sean $X_i \to U(0, 1)$, $i = 1, ..., n$, independientes.
Determine usando la función generadora de momentos la distribución de la v.a.:

$$Y = -2 \cdot ln(\prod_{i=1}^{n} X_i)$$

¿Cuál es la distribución para n grande? Calcule $P(y > 53)$ si $n = 50$.

Pregunta 6.

a) Un embarque de televisores consta de 40 lotes de 1000 TV cada uno. De cada lote, se examina una muestra de 80 televisores (en forma independiente), contándose el número de defectuosos. Si el fabricante asegura que la probabilidad que un televisor sea defectuoso es 0,01; calcule la probabilidad que se encuentran más de 40 televisores defectuosos en los 40 lotes.

b) Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tienen estaturas (H, M) que son v.a. tales que $H \to N(1{,}7; 0{,}1^2)$ y $M \to N(1{,}6; 0{,}05^2)$. Si se escoge un individuo al azar y resulta tener estatura inferior a 1.65, calcule la probabilidad de que sea mujer. ¿Cómo cambia su respuesta si se sabe que la estatura del individuo es igual a 1.65?

Pregunta 7.

El ingreso mensual de las personas X puede modelarse como una v.a. producto de muchas variables independientes entre sí, (como sexo, edad, eduación, etc.) es decir $X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 ... \cdot X_n$, con $E(X_i) = \mu_i$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Si n es un número grande, determine la densidad de X.

Pregunta 8.

Sean X e Y los errores de medición de las coordenadas x e y al medir la posición de un objeto en el plano.

Si $X \sim N(0, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$ independientes. Determine, usando el T.C.V, la densidad de

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Nota: La distribución de R se conoce como la distribución de Rayleigh.

Pregunta 9.

La nota de los alumnos del curso MA3403 puede ser considerada como una v.a. normal de media μ y varianza σ^2. Si se sabe que se aprueba con nota igual o superior a 4,0, se reprueba con nota menor a 3,7 y se queda pendiente con nota entre 3,7 y 4,0:

i) Suponga que $\mu = 4,2$, $\sigma^2 = 0,8^2$ y 110 alumnos. Si se elige un grupo de 10 alumnos, sin reposición, calcule la probablidad que "a lo más dos de ellos estén reprobados y al menos 9 estén aprobados".

ii) Si del curso se eliminan los reprobados, ¿Cuál es la función de densidad de la nota de los restantes? Calcule su esperanza.

iii) Suponga que μ es desconocido y se escoge una muestra de alumnos de tamaño n (independiente). Determine n de tal forma que la media muestral $\overline{X}$ difiera de la media poblacional μ en menos de 0,5 con probabilidad 0,95.

Pregunta 10.

a) Sean X_1, X_2, ... v.a. tal que

$$P(X_n = e^n) = \frac{1}{n} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Muestre que $X_n \underset{P}{\rightarrow} 0$ pero $E(X_n^k) \rightarrow \infty \ \forall k > 0$

b) Sean X, Y v.a. tales que
$E(X) = E(Y) = \theta$, $Var(X) = \sigma^2$, $Var(Y) = k \cdot \sigma^2$.
Sean X_1, X_2, ..., X_n, Y_1, Y_2, ..., Y_m m.a. de X e Y respectivamente,
y $\hat{\theta} = \alpha\overline{X} + \beta\overline{Y}$.
Determineα y β (constantes ambos) para que $\hat{\theta}$ sea un estimador insesgado y con varianza mínima

Pregunta 11.

Un experimento de Bernoulli de parámetro p se repite hasta obtener r éxitos. Si X representa el número de repeticiones realizadas. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de p.

Muestre que $\frac{r-1}{x-1}$ es estimador insesgado de p $(r < 1)$

Pregunta 12.

Si X es una v.a. con distribución:

i) Pareto.

ii) Poisson

iii) Beta de parámetros $\alpha = \theta$ y $\beta = 1$

Determine el estimador de máxima verosimilitud de los parámetros respectivos.

Analice sesgo, varianza y distribuciones muestrales cuando se pueda.

Pregunta 13.

Se sospecha que cierto río está altamente contaminado con bacterias, superando el nivel permitido (que es de 200 por unidad de volumen (UV)). Se toma una muestra de tamaño 10 (es decir se toman 10 UV), contando la cantidad de bacterias, los resultados fueron los siguientes: 175 190 215 198 184 207 210 193 196 180.

Suponga que la cantidad de bacterias por UV tiene distribución N(μ, σ^2)

i) Suponga conocido $\sigma^2 = 169$. Determine el intervalo de confianza simétrico para μ con confianza 0.99.

ii) Un estudiante dice que no hay problemas de contaminación ya que había calculado un intervalo de confianza simétrico para μ obteniendo (190,6;199)

¿Qué confianza tiene ese intervalo?

¿Qué puede concluir de i) y de lo dicho por el estudiante?

iii) Determine un intervalo de confianza del 95% para σ^2.

Pregunta 14.

a) Una reciente encuesta del plano criollo, arrojó los siguientes resultados en el mes de Abril con respecto a la elección de los reyes Guachacas: De 1.000 personas encuestadas, el 28% votaría por Salfaro y el 24% por Virueira. Evalue intervalos de confianza del 95% para la proporción que vota por Salfaro y la proporción que vota por Virueira.

¿Cuál es el máximo nivel de confianza para el cual los intervalos de confianza no se topan?

¿Qué puede concluir si como mínimo usted trabaja con una confianza del 90%?

b) Se dice que $X_1, X_2, ...X_n, ...$ converge a C en media cuadrática si

$$\lim_{n\to\infty} E((X_n - C)^2 = 0)$$

Sean $X_1, X_2, ...X_n, ...$ tales que

$P(X_n = \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n^2}$

$P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$

¿Existe C tal que X_n converge a C en probabilidad?

¿Existe C tal que X_n converge a C en media cuadrática?

Pregunta 15.

a) Sea X una v.a. con distribución Poisson de parámetro λ .

Determine el E.M.V. de λ y a partir de él construya un intervalo de confianza para λ con confianza $(1 - \alpha)$, considerando n grande.

b) Se desea estudiar la variable

X: número de vehículos por hora que cruzan con luz roja un determinado semáforo.

X se puede modelar por una distribución de Poisson de parámetro λ.

Para estimar λ, un estudiante decide tomar una muestra de tamaño n = 2 y usar $\hat{\lambda} = \frac{X_1+X_2}{2}$. Otro estudiante (un poco más flojo) recibe la información: "parece que λ podría ser 1", por lo que decide usar $\hat{\hat{\lambda}} = 1$. En términos del Error Cuadrático Medio, determine cuando un estimador es preferible al otro.

Fecha de Entrega: Día Control 3.