Auxiliar N°10. Estimación Puntual

Probabilidades y Estadística - MA3403 - Otoño 2010

Profesor: Fernando Lema

Auxiliares: Abelino Jiménez - Juan Carlos Piña

RESUMEN.

Definición. Muestra Aleatoria.

Sea X v.a. con cierta distribución de probabilidad. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aleatorias independientes, cada una con la misma distribución de X . Se dice que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ es una muestra aleatoria de X .

Definición. Estadístico.

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. X y sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ los valores tomados por la muestra. Sea H una función definida para $(x_1, \dots, x_n)$. Se dice que $Y = H(X_1, \dots, X_n)$ es un estadístico que toma el valor $y = H(x_1, \dots, x_n)$

Observaciones.

1. Una muestra aleatoria se puede considerar como n mediciones de la variable X .
2. Un Estadístico es una variable aleatoria!!!

Teorema

Sea X v.a. con $\mathbb{E}(X) = \mu$, y $Var(X) = \sigma^2$. Sea $\bar{X}$ el promedio muestral de una muestra aleatoria simple de tamaño n . Entonces

- $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$
- $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- Para n grande $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ tiene aproximadamente la distribución $N(0, 1)$. (En caso que n sea pequeño, se debe calcular la distribución de $\bar{X}$.)

Definición. Estimador.

Sea X v.a. con cierta distribución de probabilidad dependiente de un parámetro θ . Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra de X y sean $x_1, \dots, x_n$ los valores muestrales. Si $g(X_1, \dots, X_n)$ es una función de la muestra que va a ser usada para estimar θ , nos referimos a g como un estimador de θ . Llamaremos a $\hat{\theta} = g(X_1, \dots, X_n)$ estimación de θ .

Observación.

θ es un número real desconocido (pero no aleatorio), mientras que $\hat{\theta}$ es una variable aleatoria.

Definición. Estimador Insesgado.

Sea $\hat{\theta}$ una estimación del parámetro θ asociado a la distribución de la v.a. X . Entonces $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado para θ si $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$ para cualquier θ .

Definición. Estimador de Varianza Mínima.

Sea $\hat{\theta}$ una estimación insesgada de θ . Diremos que $\hat{\theta}$ es una estimación de varianza mínima de θ si para todas las estimaciones θ^* tales que $\mathbb{E}(\theta^*) = \theta$, tenemos $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\theta^*)$ para cualquier θ . Es decir, entre todas las estimaciones insesgadas de θ , $\hat{\theta}$ tiene la varianza más pequeña.

Definición. Estimador Convergente.

Sea $\hat{\theta}$ una estimación θ . Se dice que $\hat{\theta}$ es una estimación convergente a θ si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| \leq \epsilon) = 1 \quad \forall \epsilon > 0$$

En general, decir a partir de la definición, si el estimador es convergente es algo difícil. Para facilitar las cosas se tiene el siguiente teorema.

Teorema.

Sea $\hat{\theta}$ una estimación θ . Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$ y si $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$, entonces $\hat{\theta}$ es una estimación convergente a θ .

Corolario.

Si X es una v.a. tal que $\mathbb{E}(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$. Se tiene que $\bar{X}$ es un estimador insesgado y convergente a μ .

Definición. Error Cuadrático Medio.

Se define al error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}$ de θ como

$$\begin{aligned} ECM(\hat{\theta}) &= \mathbb{E} \left((\hat{\theta} - \theta)^2 \right) \\ &= Var(\hat{\theta}) - Sesgo^2 \end{aligned}$$

donde $Sesgo = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$.

Definición. Estimador de Máxima Verosimilitud.

El estimador de máxima verosimilitud de θ , llamado $\hat{\theta}$, basado en una muestra $X_1, \dots, X_n$, es el valor de θ que maximiza a $L(X_1, \dots, X_n; \theta)$, considerado como una función de θ para la muestra dada. L está definida como

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) = f(X_1; \theta) \cdot f(X_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(X_n; \theta)$$

Observaciones y Propiedades

1. El estimador de máxima verosimilitud no necesariamente va a ser insesgado.
2. Se tiene la propiedad de invarianza. Es decir si $\hat{\theta}$ es el EMV de θ , entonces $g(\hat{\theta})$ es el EMV de $g(\theta)$

EJERCICIOS.

1.- Sean $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de una v.a. $X \sim Bernuolli(p)$. Calcule el estimador de máxima verosimilitud de p y muestre alguna distribución aproximada de éste.

2.- Suponiendo que $X_1, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria de una variable aleatoria X con esperanza μ y varianza σ^2 . Sea

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

donde $\bar{X}$ es el promedio muestral. Muestre que:

- a) $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$.
- b) Si X es normal, entonces $\frac{(n-1)}{\sigma^2} \cdot S^2$ es una distribución χ cuadrado con $(n-1)$ grados de libertad.

3.- Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim exp(\alpha)$.

- a) Calcule la función de densidad de $Min(X_1, \dots, X_n)$.
- b) Encuentre el Estimador de máxima verosimilitud de $1/\alpha$.
- c) A nivel de estimación, como se relaciona la parte a) con b).
- d) Suponga que usted tiene artículos cuyos tiempo de buen funcionamiento se puede modelar como una v.a. $exp(\alpha)$. Usted tiene n artículos funcionando en forma independiente y espera un tiempo T_0 (el cuál usted define arbitrariamente). Luego de eso, se observa que de los n artículos, k fallaron. Estime $1/\alpha$ a partir de T_0 y k .