

Pauta P1

(a.i)

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = \lambda e^{-\lambda x} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy = \lambda e^{-\lambda x}$$

Análogamente,

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$$

De esta manera,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Por lo tanto X, Y son variables independientes.

(a.ii)

Consideremos $\varphi(X, Y) = (\frac{X}{X+Y}, X+Y)$. Luego $W = \varphi_1 \in (0, 1), Z = \varphi_2 \in (0, \infty)$
Luego,

$$\varphi^{-1}(Z, W) = (ZW, W(1-Z)) \quad \wedge \quad J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{Y}{(X+Y)^2} & 1 \\ \frac{-X}{(X+Y)^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, por el teorema de cambio de variables, se tiene:

$$f_{Z,W}(z, w) = \frac{f_{X,Y}(\varphi^{-1}(z, w))}{|det(J\varphi(\varphi^{-1}(z, w)))|} = f_{X,Y}(zw, w(1-z))|w|$$

Pues,

$$det(J\varphi(\varphi^{-1}(z, w))) = \frac{1}{w}$$

Finalmente,

$$f_{Z,W}(z, w) = \lambda^2 e^{-\lambda w} |w| = \lambda^2 e^{-\lambda w} w$$

Claramente, $f_W(w) = \lambda^2 e^{-\lambda w} w$

$$\text{Luego } f_Z(z) = \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda w} w dw = \lambda^2 \left(-\frac{e^{-\lambda w}}{\lambda} w \right)_0^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda w} dw = 1$$

Por lo tanto, se concluye que Z, W son variables independientes.

Por otro lado, se tiene que

$$Var(Z) = \frac{1}{12}$$

(b)

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\infty}^\infty \mathbb{P}(X < y | Y = y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^\infty \mathbb{P}(X < Y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^\infty F_X(y) f_Y(y) dy$$

Para la evaluación recordemos:

$$X \sim \exp(\lambda_1) \Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x} \quad \wedge \quad Y \sim \exp(\lambda_2) \Rightarrow f_Y(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$$

En ambos casos se considera $y \geq 0$ (para otros valores de y ambas cantidades son 0)

Así, en este caso se tiene:

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} dy = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$