Auxiliar N°7. Esperanza

Probabilidades y Estadística - MA3403 - Otoño 2010
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Juan Carlos Piña

RESUMEN.

Esperanza

Sea X variable aleatoria, se define

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int x \cdot f_X(x)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedades

se tiene:
(1) Si $X = \alpha$, entonces $\mathbb{E}(X) = \alpha$
(2) Si X, Y son v.a., entonces $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$
(3) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$
(4) Si X v.a. y $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene entonces:

$$\mathbb{E}\left(\Psi(X)\right) = \begin{cases} \sum_{i \in I} \Psi(x_i) \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int \Psi(x) \cdot f_X(x)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

(5) Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

Varianza

Si X es una variable aleatoria, se define la varianza de X como:

$$Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

Propiedades

se tiene:
(1) Si $X = \alpha$, entonces $Var(X) = \alpha$
(2) $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$
(3) Si X e Y son independientes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Covarianza y Correlación,

Sean X e Y dos variables aleatorias, se define covarianza y correlación respectivamente como:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\right] \\ \rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} \end{aligned}$$

Propiedades

se tiene:
(1) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
(2) $Cov(X + \alpha Y, Z) = Cov(X,Z) + \alpha \cdot Cov(Y,Z)$
(3) Si X e Y son independientes, entonces $Cov(X,Y) = 0$

Esperanza Condicional,

Sean X e Y dos variables aleatorias, se define

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in I} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y) & \text{caso discreto} \\ \int x \cdot f_{X|Y}(x \mid y) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Observación,

$\mathbb{E}(X \mid Y)$ es una variable aleatoria (función de Y)

Propiedad,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid Y)\right] = \mathbb{E}(X)$$

EJERCICIOS.

1.- Considere que en un circuito, la corriente I es independiente de la resistencia R, se tiene que las funciones de densidade de I y R están dadas por:

$$\begin{aligned} f_I(i) &= 2i \;\; 0 \leq i \leq 1 \\ f_R(r) &= \frac{r^2}{9} \;\; 0 \leq r \leq 3 \end{aligned}$$

Usando el $T.C.V$ determine la densidad de $V = IR$.

2.- Paseo Aletorio. (Referencia Clase Auxiliar 4)
Se tiene una partícula en el conjunto $\mathbb{Z}$ ubicada en el 0, la partícula se mueve por turnos hacia la derecha con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad $(1-p)$. Sea X la variable aleatoria que indica la posición de la partícula después de n turnos. Calcule $\mathbb{E}(X)$.

3.- Problema de la Barra.
Se tiene una barra de largo L a la cual se le quieren hacer dos cortes al azar. Sea $X \sim U(0, L)$, la v.a. que representa el lugar del primer corte, e $Y \sim U(x, L)$, v.a. que representa el lugar del segundo corte entre el primero y el extremo L de la barra. Calcule $\mathbb{E}(Y)$.

4.- Un fabricante produce cierto tipo de aceite lubricante que pierde alguno de sus atributos especiales si no se usa dentro de cierto período de tiempo. Sea X el número de unidades de aceite pedidas al fabricante durante cada año (una unidad es igual a 1000 galones). Supongamos que X es una variable aleatoria continua, uniforme en $[2, 4]$. Supongamos que por cada unidad vendida se obtiene una utilidad de \$300, mientras que cada unidad no vendida (durante un año determinado) produce una pérdida de \$100. El fabricante debe decidir pocos meses antes del comienzo de cada año cuánto producirá, y que decide fabricar Y unidades. ¿Cuál es el valor de Y que maximiza la utilidad esperada?

5.- Se sabe que si X e Y son independientes $Cov(X, Y) = 0$. Muestre un ejemplo que ilustre que la recíproca no se tiene.