Tarea 2 - Probabilidades y Estadística - Otoño 2010

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez - Juan Carlos Piña

Pregunta 1.

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución de Pareto de parámetros X_0,α ($X_0 > 0, \alpha > 0$) si su función densidad es:

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\alpha X_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & si\, x \geq X_0 \\ 0 & si\, x < X_0 \end{cases}$$

1. Calcule E(x) y Var(x)
2. Si $Y = \ln\left(\frac{X}{X_0}\right)$, determine la densidad de Y
3. Considere que X representa el ingreso (en miles de $) mensual de un grupo de individuos con $X_0 = 200$ y $\alpha = 2$. Suponga que de un gran numero de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a $300.000.
4. Si a todas las personas que ganan menos de $400.000 se les da un reajuste de un 10 % mientras que a aquellos que ganan más de $400.000 se les da $40.000 de reajuste, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria monto de reajuste y calcule su esperanza.

Pregunta 2.

La duración T (en horas) de cierta maquina, es una v.a. exponencial de parámetro λ. La maquina tiene costos de funcionamiento de C_1 (UM) por hora y produce, mientras funciona, un ingreso de C_2 (UM) por hora. Para operar la maquina se requiere un especialista que cobra C_3 UM por hora y que exige ser contratado por un numero prefijado de horas (H). El pago del especialista es independiente de si la maquina esta o no en funcionamiento.

1. Sea U la v.a. que denota la utilidad obtenida por el uso de la maquina. Plantee U en función de los datos entregados.
2. Determine H de tal forma de maximizar la utilidad esperada.
3. Suponga que $\lambda = 0{,}01$, $C_1 = 6$, $C_2 = 20$, $C_3 = 4$ y que $H = 60$ (no es el óptimo de b). Determine la distribución de probabilidades de la v.a. U.

Pregunta 3.

a)Las primeras 5 repeticiones de un experimento cuestan 10[UM] c/u. Las siguientes cuestan 5[UM] c/u. El experimento debe repetirse hasta que se obtenga el primer éxito. Si la probabilidad de éxito es 0,9 y si las repeticiones son independientes, determine el costo promedio total de la operación.

b)Al revisar un lote de 10 motores este es totalmente rechazado o es vendido, dependiendo del siguiente procedimiento: dos motores elegidos al azar se inspeccionan; si al menos uno es defectuoso el lote es rechazado, en otro caso es aceptado. Suponga que cada motor cuesta 75 [UM] y se vende a 100[UM]. Si el lote contiene 2 motores defectuosos, calcule la utilidad esperada del constructor

Pregunta 4.

Sea X una v.a. cualquiera. Determine d tal que minimice:

1. $E\left((X-d)^2\right)$; denominado error cuadrático medio.
2. $E\left(|X-d|\right)$; denominado error absoluto medio

Pregunta 5.

Suponga que en un juego usted gana un partido con probabilidad p. Cuando gana, su capital se dobla y cuando pierde, su capital se reduce a la mitad. Si comienza con C[UM] de capital y juega n partidos independientes. Determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Utilidad. Calcule su esperanza.

Pregunta 6.

En un ataque aéreo la misión es destruir una pista de aterrizaje. El sector donde cae la bomba queda inutilizado en su ancho si esta cae a lo sumo a 10 metros del eje central de la pista. La distancia del impacto al eje central de la pista es una v.a. con función densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{30+x}{900} & \text{si } -30 \leq x \leq 0 \\ \frac{30-x}{900} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Si para inutilizar la pista se necesitan por lo menos k impactos ¿Cuál es la probabilidad de lograr el objetivo si en el ataque se lanzan n bombas?

Si k=1, determine cuantas bombas se deben lanzar para inutilizar la pista con probabilidad 0,99.

Pregunta 7.

Suponga que la duración de un equipo sigue una distribución e(λ), es decir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\, x \geq 0 \\ 0 & si\, x < 0 \end{cases}$$

Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en t = 0, pero el operario (por flojera) solo se pone a inspeccionar en $t = t_1$, de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente le asigna t_1 horas. También por flojera el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en t_2 (hora en que se va) este bueno le asigna t_2 horas.

1. Determine la distribución de Y: duración informada por el operario. Calcule E(Y).

2. Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todo equipo que no haya inspeccionado realmente. Determine la distribución de Z: duración informada por el operario.

3. Si Y se distribuye con una exponencial de parámetro α independiente de X, calcule P$(Y > kX)\forall k$

4. Determine la densidad de Z = X + Y

Pregunta 8.

Suponga que un comerciante de autos usados paga una cantidad X (en miles de pesos) por un vehículo y lo vende por una cantidad Y (en miles de pesos). Las variables X e Y tienen una densidad conjunta :

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{36} & si\, 0 < x < y < 6 \\ 0 & si\, no \end{cases}$$

1. Determine la función densidad de la variable ganancia por vehículo (G).

2. Considere ahora solo la variable Y (precio de venta) con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{72} & si\, 0 < y < 6 \\ 0 & si\, no \end{cases}$$

   Debido a las condiciones económicas imperantes, el comerciante decide hacer un regalo a sus compradores. El ofrece por todo vehículo cuyo precio de venta esta entre 0 y 2000 un 1 % en vales de bencina. Si el precio esta entre 2000 y 4000 regala un par de parlantes cuyo valor es \$40,000. Para el resto entrega una radio de valor \$100,000. Estudie probabilísticamente la variable monto regalado por automóvil. Calcule su esperanza.

Pregunta 9.

De un mazo de naipes se sacan dos cartas sin reposición, definiendo el vector (X, Y) como X: N° de monos obtenidos. Y : N° de ases obtenidos.

1. Determine la distribución de probabilidades (X, Y).

2. Determine las distribuciones marginales de X e Y . Calcule la E(X) y E(Y).

3. Determine la distribución condicional de X dado Y = y $\forall y \in R_y$ y la distribución condicional de Y dado X = x $\forall x \in R_x$.

4. Determine la distribución de probabilidades de las variables M = H(X, Y) = Max(X, Y); M = H(X, Y) = Min(X, Y)

Pregunta 10.

Sean X, Y v.a. discretas, independientes.

Si X$\rightarrow$ Geom(p) e Y$\rightarrow$ Geom(p), calcule $P(X = m|X + Y = n)$

Indicacion: Calcule $P(X + Y = j)$ para un j genérico.

Si X$\rightarrow$ Bin(n,p) e Y$\rightarrow$ Bin(m,p), calcule $P(X = j|X + Y = k)$

Indicacion: $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$

Pregunta 11.

Sea $X \sim exp(\alpha)$, es decir

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

Muestre que

$$P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t) \Longleftrightarrow X \sim exp(\alpha)$$

Pregunta 12.

a) Sea X una variable aleatoria discreta con $R_X = \mathbb{N}$. Muestre que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

b) Sea X una variable aleatoria continua con $R_X = \mathbb{R}^+$. Muestre que

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx$$

Pregunta 13.

La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable con corriente I, queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

1. Si P es un punto variable con X e I, suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo (2, 4) e I uniforme en el intervalo (10, 20) (ambas variables independientes) calcule la función densidad de H.

2. Calcule la $P(H > 10/X < 3)$.

Pregunta 14.

Una fuente luminosa produce en un punto dado una iluminación L dada por:

$$L = \frac{I}{R^2}$$

Donde I: intensidad luminosa de la fuente y R: Distancia del punto a la fuente.

Suponga que I y R v.a. independientes, tales que $I \rightarrow U(1,2)$ y $R \rightarrow e(1)$

a) Calcule $P(L > 1/I > 1.5)$

b)Usando T.C.V. determine la densidad de L.

c)Calcule la iluminación promedio de puntos ubicados a 2 unidades de distancia.

Fecha de Entrega: Día Control 2.