

Tarea 1 - Probabilidades y Estadística - Otoño 2010

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Abelino Jiménez
Juan Carlos Piña

Pregunta 1.

Tres personas llegan a un cine y se sientan todos en una misma fila de n asientos (todos vacíos), de forma aleatoria. Calcule:

- (a) La probabilidad de que los tres queden contiguos.
- (b) La probabilidad de que exactamente dos de ellos queden contiguos.
- (c) La probabilidad de que ninguno de ellos quede contiguo a otro.

Pregunta 2.

(a) Muestre que si $P(A | D) \geq P(B | D)$ y $P(A | D^C) \geq P(B | D^C)$ entonces $P(A) \geq P(B)$.

(b) Sean A, B independientes tales que $P(A \cap B \cap C) = 0.04$;

$P(C | A \cap B) = 0.25$; y $P(B) = 4P(A)$. Calcular $P(A \cup B)$.

(c) Sea $A = \{x \in \mathbb{N}, x \text{ posee 3 cifras y sus dígitos distintos y ordenados}\}$

(Por ejemplo 138 pertenece a A , 972 también, pero 194 no, no considere números de la forma 075) ¿Cuál es la cardinalidad de A ?

Pregunta 3.

(a) Un número binario está compuesto sólo de los dígitos 1 y 0 (cada dígito es un bit), supóngase que un número binario está compuesto por n bits y que la probabilidad que aparezca un bit incorrecto es p , además supóngase que los errores en bits diferentes son independientes entre sí ¿Cuál es la probabilidad de formar un número incorrecto?

(b) Considere un determinante de segundo orden donde el elemento de cada casilla corresponde a un bit y cada uno de éstos tiene valores equiprobables y son independientes entre sí.

Calcule $P(\text{determinante} > 0)$ y $P(\text{determinante} = 0)$.

Pregunta 4.

Considere un naípe inglés.

Calcule la probabilidad de recibir en una mano de 13 cartas, al menos una escala real (10 J Q K A) de alguna pinta.

HINT: piense en la probabilidad de una unión de eventos.

Pregunta 5.

Considere un mazo de naipes.

- (a) Se extraen 4 cartas al azar con reemplazo. Calcule la probabilidad:
 - i) Que las 4 sean, rojas o pares.
 - ii) Que las 4 sean rojas, o las 4 sean pares.
- (b) Se extraen 6 cartas sin reemplazo. Calcule la probabilidad:
 - i) Que al menos 4 sean, rojas o pares.
 - ii) Que al menos 4 sean rojas, o al menos 4 sean pares.

Pregunta 6.

Suponga que una persona esta situada a N cuadras al sur y a M cuadras al oeste de la esquina a la cual se quiere llegar.

- (a) ¿Cuántos caminos “inteligentes” existen entre ambos puntos? (Camino “inteligente” se entiende por aquel que sólo consta de desplazamientos que acercan al destino, es decir, unitarios de una cuadra tanto en dirección norte como este).
- (b) Considere $M = N$. Fijándose que para llegar a destino en este caso, el camino elegido debe pasar por alguna intersección de las que forman la diagonal secundaria del cuadrilátero, calcule la suma de los cuadrados de los coeficientes binomiales sobre N .

NOTA: En todo el problema, considere que las calles no terminan dentro del cuadrilátero, o sea, todo camino “inteligente” es susceptible de ser realizado.

Pregunta 7.

En el ascensor de un edificio de n pisos hay m personas, todas distinguibles.

Suponiendo que las personas se bajan en cualquier piso con igual probabilidad y sin importar lo que haga el resto de los pasajeros.

¿De cuántas formas posibles se pueden bajar las personas del ascensor?

¿De cuántas maneras posibles se puede lograr que m_1 personas se bajen en el primer piso, m_2 personas se bajen en el segundo piso y así respectivamente con

$$m_i \in \{0, \dots, m\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n m_i = m?$$

¿De cuántas maneras posibles se puede lograr que todas las personas se bajen en pisos diferentes?

Pregunta 8.

Considere el alfabeto español compuesto de 27 letras (sin Ch y Ll)

(a) Se desea escoger grupos de 10 letras al azar, ¿de cuántas maneras se puede hacer?

- i) Sin reposición.
- ii) Con reposición.

(b) Al sacar letras (con reposición) se obtuvo al menos una “S”. Calcule la probabilidad que la primera “S” se haya obtenido en la tercera extracción.

- (c) Suponga ahora que se sacaron 10 letras (con reposición) y se obtuvo “MISISSIPT”. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras obtenidas, de tal forma que no queden 2 o más “T” juntas?
- (d) Elegidas las 10 letras, usted y su mejor amigo(a) juegan sacando letras (de entre 10, con reposición) alternadamente, ganando el que obtiene primero una “P” o una “M”.
 Describa un espacio muestral adecuado para este juego. ¿Cuál es la probabilidad que usted gane si comienza sacando?

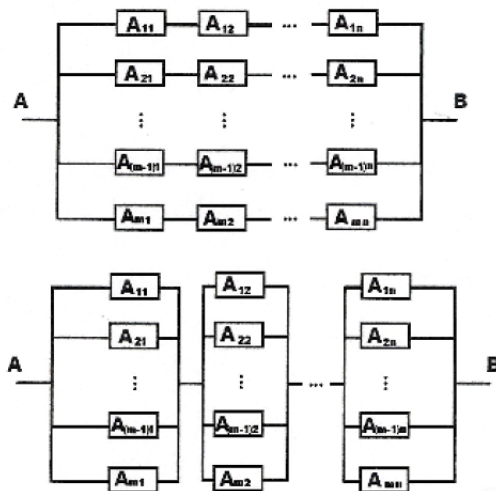
Pregunta 9.

La restricción vehicular reparte los 10 dígitos posibles (2 diarios) en forma aleatoria. Usted tiene dos autos cuyas patentes terminan en dígitos diferentes. Calcule:

- (a) El total de formas en que puede programarse la restricción.
 (b) La probabilidad de que algún día no pueda usar ninguno de sus vehículos. Indique el espacio muestral.
 (c) Suponga ahora que con probabilidad p hay preemergencia en un día cualquiera, y en esos días se debe agregar 2 dígitos extra, que cada día que hay preemergencia se eligen de forma aleatoria entre los dígitos que quedan libres. Calcule la probabilidad de no poder usar sus autos en toda la semana (lunes a viernes).

Pregunta 10.

Considere los siguientes circuitos:



Las componentes A_{ij} tienen una probabilidad p de funcionar (($1 - p$) de fallar) y lo hacen de forma independiente. Calcule para ambos circuitos la probabilidad que exista flujo desde el punto A hasta el punto B .

Pregunta 11.

Para predecir el tiempo, un día es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a p .

(a) Si el 1 de abril es seco con probabilidad β , muestre que la probabilidad que el n -ésimo día del año (contado a partir del 1 de abril) sea seco (P_n) queda dada por:

$$P_n = \left[\left(\beta - \frac{1}{2} \right) (2p - 1)^{n-1} \right] + \frac{1}{2}$$

(b) Si el 16 de abril está seco, calcule la probabilidad que el 14 de abril también lo haya estado. Para esto considere $\beta = 1$, $p = \frac{9}{10}$

Pregunta 12.

Cierta enfermedad congénita se transmite a la descendencia de modo que si uno de los padres presenta el gen T, cada hijo tiene probabilidad α de enfermar si esto proviene de su padre, y β si este viene de su madre. Si ambos presentan el gen, es seguro que el hijo enfermará. Por otro lado, se sabe que la enfermedad no aparece espontáneamente y que cada padre tiene probabilidad p de presentar el gen (independientemente).

(a) Si una persona está enferma ¿Cuál es la probabilidad de que la enfermedad haya sido transmitida sólo por la madre?

(b) Suponga que la persona de la parte (a) tiene un hermano (con el mismo padre y la misma madre). Calcule la probabilidad de que esté enfermo si se sabe que su hermano lo está.

Pregunta 13.

Cuando en una encuesta se desea preguntar por un tema delicado como el aborto (o infidelidad, violencia, divorcio, etc.), y que las personas no están dispuestas a contestar abiertamente, se puede usar el siguiente procedimiento encubierto para estimar la probabilidad p que una persona esté a favor:

Al encuestado se le presentan dos preguntas:

A ¿Está de acuerdo con el aborto?

B ¿Está en desacuerdo con el aborto?

y se le pide que lance (en secreto) un dado perfecto, de modo que si sale mayor a cuatro contesta A y en caso contrario contesta B. Por último, lo único que el encuestado responde es SI o NO.

(a) Describa un espacio muestral para este procedimiento.

(b) Si una persona respondió SI, ¿Cuál es la probabilidad que esté a favor del aborto?

(c) Si a usted, como encargado de la encuesta, le entregan como resultado la proporción (probabilidad) de personas que respondió SI (P_S), calcule la proporción (probabilidad) de personas que está a favor del aborto.

OBS: Suponga que la encuesta es aplicada a un gran número de personas y que éstas son honestas al responder.

Pregunta 14.

Cuando una máquina productiva está correctamente ajustada produce el 80% de los artículos de alta calidad y el resto de calidad media, en cambio cuando la máquina está mal ajustada sólo produce el 40% de alta calidad. Suponga que el 30% de los días la máquina está mal ajustada.

(a) Se escogen 3 artículos producidos un día cualquiera encontrándose 2 de alta calidad y 1 de calidad media. Calcule la probabilidad que ese día la máquina estuviera correctamente ajustada.

(b) Bajo el mismo enunciado original, suponga ahora que un operario revisa todos los artículos sacando los de calidad media según su parecer. Si un artículo es de alta calidad, existe una probabilidad 0,05 que el operario la considere de calidad media; en cambio, si es de calidad media lo detecta con probabilidad 0,9. Los artículos puestos a la venta son aquellos catalogados de alta calidad por el operario. Si un artículo es comprado por un cliente que reclama diciendo que le vendieron un artículo de calidad media, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la razón?

Pregunta 15.

Edmundo quiere enviar una carta a Carolina. La probabilidad de que Edmundo escriba la carta es 0.8 ; la probabilidad de que el correo no pierda la carta es 0.9 y la probabilidad de que el cartero entregue la carta es 0.9. Si Carolina no recibió la carta ¿Cuál es la probabilidad condicional que Edmundo no la haya escrito?

Fecha de Entrega: Día Control 1.