Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística Otoño 2010

Roberto Cortez
Julio Backhoff
Víctor Riquelme

Control # 2

Tiempo: 3 horas

P1. Decimos que la variable aleatoria X tiene *distribución de Pareto* si su densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(x_m/x)^{\alpha+1} & x \geq x_m \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $x_m, \alpha > 0$ son parámetros.

a) (1.5 ptos.) Muestre que $c = \alpha/x_m$.

b) (1.5 ptos.) ¿Para cuáles α está bien definida la esperanza de X? Calcule $E(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

c) (1.5 ptos.) ¿Para cuáles α está bien definida la varianza de X? Calcule $\operatorname{var}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

d) (1.5 ptos.) ¿Cuál es la distribución de $\log(X/x_m)$?

P2. *a)* (3.0 ptos.) Se dispone de una urna con N bolitas, de las cuales m son blancas y el resto son negras, y se extraen n bolitas al azar. Calcule la cantidad esperada de bolitas blancas extraídas. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas y utilice la linealidad de la esperanza.

b) (3.0 ptos.) Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule las densidades marginales de X e Y. ¿Son independientes? Explique. *Indicación:* dibuje la región en que la densidad conjunta es estrictamente positiva.

P3. Decimos que Y es una variable *chi-cuadrado con n grados de libertad*, anotado $Y \sim \chi^2_n$, si puede escribirse de la forma $Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2$, donde las variables X_i son $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes. Se desea calcular la esperanza y varianza de Y, para lo cual siga los siguientes pasos:

a) (1.2 ptos.) Sea X variable aleatoria con densidad f_X. Pruebe que la densidad de la variable aleatoria X^2 es

$$f_{X^2}(x) = \frac{f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Indicación: dado $x \geq 0$, se tiene que $X^2 \leq x$ si y sólo si $-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}$.

b) (1.2 ptos.) Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, muestre que la densidad de X^2 es

$$f_{X^2}(x) = \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

c) (1.2 ptos.) Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, pruebe que la función generadora de momentos de X^2 es $M_{X^2}(t) = (1 - 2t)^{-1/2}$ $\forall t < 1/2$.

d) (1.2 ptos.) Muestre que la función generadora de momentos de $Y \sim \chi^2_n$ es $M_Y(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$ $\forall t < 1/2$. *Indicación:* utilice la independencia de las variables X_i.

e) (1.2 ptos.) Dado $Y \sim \chi^2_n$, calcule $E(Y)$ y $\operatorname{var}(Y)$.