Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística
Otoño 2010

GUÍA EJERCICIOS # 3

Roberto Cortez
Julio Backhoff
Víctor Riquelme

1. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1.$$

Se definen las variables aleatorias $U = XY$, $V = X/Y$.

a) Encuentre la función densidad conjunta para las variables U y V.

b) Encuentre las densidades marginales para U y V.

2. Sean X e Y variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro $\lambda = 1$. Sean $U = X/Y$, $V = XY$. Muestre que función de densidad conjunta de U y V es

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{e^{-(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}})\sqrt{v}}}{2u} & u > 0, v > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y.

b) Encuentre las densidades condicionales $f_X(x|Y=y)$ y $f_Y(y|X=x)$.

c) Encuentre $E(X|Y=y)$.

4. Sea $\vec{X} = (X,Y)$ un vector normal bivariado, y sean $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ y $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Muestre que $\vec{Y} = \vec{b} + A\vec{X}$ también es un vector normal bivariado.

5. Se sabe que el valor esperado del puntaje que obtiene un alumno en el examen final de un ramo es de 75.

a) Dé una cota superior de la probabilidad que el puntaje sea mayor que 85.

b) Suponga que además se sabe que la varianza del puntaje es de 25. ¿Qué puede decirse sobre la probabilidad de que el puntaje obtenido por el alumno esté entre 65 y 85?

6. Sean (X_n), (Y_n) sucesiones de variables aleatorias, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que (X_n) converge en probabilidad a α e (Y_n) converge en probabilidad a β.

a) Dado $\varepsilon > 0$, muestre que

$$P(|X_n + Y_n - (\alpha+\beta)| \geq \varepsilon) \\ \leq P(|X_n - \alpha| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - \beta| \geq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Indicación: si $|a+b| \geq \varepsilon$, entonces $|a| \geq \varepsilon/2$ o bien $|b| \geq \varepsilon/2$.

b) Concluya que $(X_n + Y_n)$ converge en probabilidad a $\alpha + \beta$.

7. Considere un estimador $\hat{\theta}$. Pruebe que

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta}) + \text{sesgo}(\hat{\theta})^2.$$

8. Sea X variable aleatoria binomial con parámetros n y p.

a) Sean $\hat{p}_1 = X/n$ y $\hat{p}_2 = (X+1)/(n+2)$ estimadores de p. Calcule $\text{ECM}(\hat{p}_1)$ y $\text{ECM}(\hat{p}_2)$. ¿Para qué valores de p es mejor $\hat{p}_2$ de acuerdo al criterio del error cuadrático medio?

b) Sea $\hat{\sigma}^2 = X(1 - X/n)$ un estimador de $\sigma^2 = \text{var}(X)$. Muestre que $\hat{\sigma}^2$ es sesgado y modifíquelo para obtener un estimador insesgado de σ^2.

9. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. de una distribución con esperanza μ y considere

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \bar{X}^2.$$

Muestre que

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

y que

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right) - (\bar{X} - \mu)^2.$$

10. Sea $\hat{\theta}$ un estimador insesgado. Pruebe que si $\mathrm{var}(\hat{\theta}) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\hat{\theta}$ es consistente. *Indicación:* siga la demostración de la LDGN.

11. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. con distribución común gamma(θ, λ). Calcule estimadores $\hat{\theta}$ y $\hat{\lambda}$ usando el método de los momentos.

12. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. con distribución común Poisson(λ). Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, calcule su esperanza y varianza, y muestre que este estimador es consistente.

13. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s. con densidad común dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Encuentre un estimador $\hat{\theta}_1$ mediante el método de los momentos.

b) Encuentre un estimador $\hat{\theta}_2$ mediante el método de máxima verosimilitud.

c) Modifique $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ para que sean insesgados.

14. Suponga que $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de un cierto parámetro θ. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Pruebe que $g(\hat{\theta})$ es el estimador de máxima verosimilitud de $g(\theta)$.

15. Un astrónomo realiza n mediciones con un radiotelescopio, de la distancia d (desconocida) en años luz desde la Tierra hasta una lejana estrella. Producto de imperfecciones del instrumento, las mediciones no son iguales a d, sino que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza d y varianza 4. El astrónomo utiliza a $\bar{X}$, el promedio de las n mediciones, como estimación de d. Usando el TLC para aproximar la distribución del promedio, y utilizando una tabla de distribución normal estándar, muestre que se necesitan por lo menos $n = 62$ mediciones para que la estimación del astrónomo esté en el rango $d \pm 0{,}5$ con probabilidad de al menos 95 %.

16. El promedio de los puntajes obtenidos por 16 personas en una prueba es de 540, y la desviación estándar (es decir, $\sqrt{s_{n-1}^2}$) es de 50. Asumiendo que el puntaje se distribuye como una normal, construya un intervalo de confianza al 95 % para la esperanza μ.

17. Se lanza una moneda 25 veces, obteniendo la siguiente secuencia:

$$SSCCCSCCSSCSSCCSCCSCSSSCC.$$

Aproximando con el TLC, obtenga un intervalo de confianza para la probabilidad de cara p al 90 %.

18. En un laboratorio se desea estudiar la variabilidad de las mediciones tomadas en un complejo experimento. Se tomaron 6 mediciones:

$$9{,}54 \quad 9{,}61 \quad 9{,}32 \quad 9{,}48 \quad 9{,}70 \quad 9{,}26.$$

Suponiendo que ellas provienen de una distribución normal, obtenga un intervalo de confianza de la varianza σ^2 al nivel 90 %.