Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística Otoño 2010

Roberto Cortez
Julio Backhoff
Víctor Riquelme

Pauta Control # 2

P1. *a)* Para calcular la constante, imponemos que la integral de la densidad en todo $\mathbb{R}$ sea 1, es decir:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{x_m}^{\infty} c\left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha+1} dx = cx_m^{\alpha+1}\int_{x_m}^{\infty} x^{-\alpha-1}dx = cx_m^{\alpha+1}\left.\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right|_{x_m}^{\infty} = \frac{cx_m}{\alpha},$$

pues como $\alpha > 0$, al evaluar en ∞ se obtiene 0. Despejando c, obtenemos $c = \alpha/x_m$.

b) Calculemos la esperanza y veamos cuándo ésta no queda bien definida:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{x_m}^{\infty} x\frac{\alpha}{x_m}\left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha x_m^{\alpha}\int_{x_m}^{\infty} x^{-\alpha}dx.$$

Para $\alpha = 1$ la primitiva es $\log(x)$, con lo cual obtenemos que $E(X) = \alpha x_m^{\alpha}\log(x)|_{x_m}^{\infty}$, lo cual vale ∞. Para $\alpha \neq 1$, tenemos:

$$E(X) = \alpha x_m^{\alpha}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{x_m}^{\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si } -\alpha+1>0 \\ -\alpha x_m^{\alpha}\frac{x_m^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{si } -\alpha+1<0. \end{cases}$$

En resumen, la esperanza de X queda indefinida para $\alpha \leq 1$, y está bien definida para $\alpha > 1$, siendo $\alpha x_m/(\alpha-1)$ su valor.

c) Calculemos la varianza y veamos cuándo hay problemas:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{x_m}^{\infty} x^2\frac{\alpha}{x_m}\left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha x_m^{\alpha}\int_{x_m}^{\infty} x^{-(\alpha-1)}dx.$$

Poniendo $\beta = \alpha - 1$ y analizando la integral con el mismo razonamiento de la parte previa, se concluye que $E(X^2)$ queda indefinida cuando $\beta \leq 1$, es decir, cuando $\alpha \leq 2$. Para $\alpha > 2$, tenemos:

$$E(X^2) = \alpha x_m^{\alpha}\left.\frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right|_{x_m}^{\infty} = \frac{\alpha x_m^2}{\alpha-2},$$

y entonces

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\alpha x_m^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2 x_m^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha x_m^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}.$$

d) Sea $Y = \log(X/x_m)$. Veamos:

$$P(Y \leq y) = P(\log(X/x_m) \leq y) = P(X \leq x_m e^y) = \int_{-\infty}^{x_m e^y} f(x)dx.$$

Si $y < 0$, entonces $x_m e^y < x_m$ y la probabilidad anterior es 0. Para $y > 0$, derivamos con respecto a y, obteniendo:

$$f_Y(y) = x_m e^y f(x_m e^y) = x_m e^y\frac{\alpha}{x_m}\left(\frac{x_m}{x_m e^y}\right)^{\alpha+1} = \alpha e^{-\alpha y}.$$

Es decir, $f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$, lo cual significa que $Y = \log(X/x_m)$ es una variable exponencial de parámetro α.

P2. *a)* Hay tres formas de resolver este problema, dos de las cuales utilizan la indicación, mientras que la última utiliza la definición de esperanza. Llamemos X a la variable aleatoria que representa el número de bolitas blancas extraídas.

Primera forma: siguiendo la indicación, por cada una de las n bolitas extraídas definimos una variable aleatoria indicatriz X_i, dada por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima bolita extraída fue blanca} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $X = X_1 + \cdots + X_n$. Además, cada variable X_i es una Bernoulli, por lo cual su esperanza es

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{m}{N},$$

donde la última igualdad se debe a que la probabilidad de que la i-ésima bolita extraída sea blanca corresponde a los casos favorables (m) dividido en casos posibles (N). Aplicando linealidad de la esperanza:

$$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \frac{nm}{N}.$$

Segunda forma: siguiendo la indicación, por cada una de las m bolitas blancas definimos una variable aleatoria indicatriz Y_j, dada por

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la } j\text{-ésima bolita blanca fue extraída} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $X = Y_1 + \cdots + Y_m$. Además, cada variable Y_j es una Bernoulli, por lo cual su esperanza está dada por:

$$E(Y_j) = P(Y_j = 1) = \frac{\binom{N}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N},$$

donde la penúltima igualdad se debe a que la probabilidad de extraer la j-ésima bolita blanca corresponde a la cantidad de formas de extraer n bolitas que incluyan a la j-ésima blanca, dividido por el total de formas de extraer las n bolitas. Aplicando linealidad de la esperanza, concluimos:

$$E(X) = E(Y_1) + \cdots + E(Y_m) = \frac{nm}{N}.$$

Tercera forma: X es una variable hipergeométrica, cuya función distribución es conocida, dada por:

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Aplicando la definición de la esperanza, se tiene que:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

donde se utiliza la convención de que los coeficientes binomiales con índices fuera de rango son 0. Usando que $a\binom{b}{a} = b\binom{b-1}{a-1}$, obtenemos:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{m\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nm}{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nm}{N}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

donde la última sumatoria es 1 pues corresponde a la suma de las probabilidades de una variable hipergeométrica con parámetros $N-1$, $n-1$ y $m-1$. Por lo tanto, $E(X) = nm/N$.

b) Calculemos la densidad marginal de X. Dado $0 < x < 1$, tenemos:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^x 2(x+y)dy = 2x\int_0^x dy + \int_0^x 2ydy = 2x^2 + x^2,$$

por lo tanto, dado que $f_{X,Y}(x,y)=0$ para $x\notin(0,1)$, obtenemos que $f_X(x)=3x^3\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$. Ahora calculemos la densidad marginal de Y. Dado $0<y<1$, para que $f_{X,Y}(x,y)$ sea no nulo se necesita que $y<x<1$ (hacer dibujo para verlo claro). Por lo tanto:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_y^1 2(x+y)dx=\int_y^1 2xdx+2y\int_y^1 dx=1-y^2+2y(1-y).$$

Luego, dado que $f_{X,Y}(x,y)=0$ para $y\notin(0,1)$, se obtiene que la densidad de Y es $f_Y(y)=(1+2y-3y^2)\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$. Cuando las variables son independientes, la densidad conjunta es el producto de las densidades. En este caso el producto de las densidades es

$$f_X(x)f_Y(y)=3x^2(1+2y-3y^2)\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathbb{1}_{(0,1)}(y),$$

lo cual no calza con la densidad conjunta de X e Y. Por lo tanto, ellas no son independientes.

P3. *a*) Dado $x>0$, tenemos:

$$P(X^2\leq x)=P(-\sqrt{x}\leq X\leq\sqrt{x})=F_X(\sqrt{x})-F_X(\sqrt{x}),$$

y derivando con respecto a x, se obtiene:

$$f_{X^2}(x)=\frac{f_X(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}-\frac{-f_X(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=\frac{f_X(\sqrt{x})+f_X(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

La indicatriz aparece porque para $x<0$ el evento $X^2<x$ es vacío y por lo tanto la densidad es 0.

b) Reemplazando f_X por la densidad de una $\mathcal{N}(0,1)$ en la fórmula de la parte previa, obtenemos:

$$f_{X^2}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{e^{-(\sqrt{x})^2/2}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{e^{-(-\sqrt{x})^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)=\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

c) Calculemos:

$$M_{X^2}(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}}dx=\int_0^\infty\frac{e^{-x(1-2t)/2}}{\sqrt{2\pi x}}dx.$$

Cuando $t\geq 1/2$ esta integral vale ∞. Para $t<1/2$, hacemos el cambio de variable $y=x(1-2t)$ y obtenemos:

$$M_{X^2}(t)=\int_0^\infty\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y/(1-2t)}}\frac{dy}{1-2t}=\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\int_0^\infty\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}dy,$$

y la integral vale 1 pues el integrando es la densidad de X^2.

d) Como $Y\sim\chi^2_n$, Y se escribe como la suma de los X_i^2, donde $X_i\sim\mathcal{N}(0,1)$ y son independientes. Por lo hecho anteriormente, se tiene que $M_{X_i^2}(t)=(1-2t)^{-1/2}$. Además, sabemos que la f.g.m. de la suma de variables independientes es el producto de las f.g.m., por lo cual

$$M_Y(t)=M_{X_1^2}(t)\cdots M_{X_n^2}(t)=(1-2t)^{-1/2}\cdots(1-2t)^{-1/2}=(1-2t)^{-n/2}.$$

e) Utilicemos la f.g.m. para calcular $E(Y)$ y $\mathrm{var}(Y)$:

$$\frac{dM_Y(t)}{dt}=-\frac{n}{2}(1-2t)^{-n/2-1}(-2)=n(1-2t)^{-n/2-1}.$$

Y derivando nuevamente:

$$\frac{d^2M_Y(t)}{dt^2}=n(-\frac{n}{2}-1)(1-2t)^{-n/2-2}(-2)=n(n+2)(1-2t)^{-n/2-2}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \left.\frac{dM_Y(t)}{dt}\right|_{t=0}=n\\
E(Y^2) &= \left.\frac{d^2M_Y(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=n(n+2)\\
\mathrm{var}(Y) &= E(Y^2)-E(Y)^2=n(n+2)-n^2=2n.
\end{aligned}$$

Observación: también es posible obtener el resultado calculando la esperanza y varianza de X^2, con $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, y luego aplicar linealidad de la esperanza y de la varianza en caso de variables independientes.