Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística
Otoño 2010

GUÍA EJERCICIOS # 2, PARTE #2

Roberto Cortez
Julio Backhoff
Víctor Riquelme

1. Se tienen dos mazos idénticos con n cartas cada uno. La persona A extrae k_A cartas al azar del primer mazo, y la persona B extrae, independiente de A, k_B cartas al azar del segundo mazo.

a) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen simultáneamente entre las escogidas por A y por B, es $(k_A k_B)/n$.

b) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen entre las escogidas por uno de ellos, pero no ambos, es $(nk_A + nk_B - 2k_A k_B)/n$.

Indicación: defina variables indicatrices adecuadas para cada caso, y use linealidad de la esperanza.

2. Un grupo de n hombres y m mujeres se forman al azar en una fila. Determine el número esperado de hombres que tienen al menos una mujer al lado suyo. *Indicación:* defina una variable indicatriz adecuada por cada hombre.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables independientes, todas con distribución uniforme en $[0,1]$. Sea $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Pruebe que $f_Y(y) = ny^{n-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$, y calcule $E(Y)$.

4. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos dadas por

$$M_X(t) = e^{2e^t - 2} \quad \text{y} \quad M_Y(t) = \frac{e^t/2}{1 - e^t/2}.$$

Pruebe que $P(XY = 1) = 1/e^2$. *Indicación:* recuerde que la función generadora de momentos caracteriza la distribución de una variable aleatoria.

5. Pruebe que la función generadora de momentos de una variable binomial con parámetros n y p es

$$(1 - p + pe^t)^n.$$

Indicación: escriba la variable de interés como suma de n variables independientes sencillas.

6. Se dice que X tiene distribución *log-normal* con parámetros μ y σ^2 si $Y = \ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

a) Pruebe que la densidad de X es

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

b) Pruebe que

$$E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \operatorname{var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

Indicación: utilice la función generadora de momentos de una variable $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

7. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & \text{si } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Pruebe que $c = 3/2$.

b) ¿Son X e Y independientes? Explique.

c) Calcule la densidades marginales de X e Y.

8. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{e^{-x^2}}{y^2 + 1}$$

para todo x e y.

a) ¿Son independientes? Explique.

b) Calcule las densidades marginales. ¿Qué variables conocidas son X e Y?