Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística
Otoño 2010

GUÍA EJERCICIOS # 2, PARTE #1

Roberto Cortez
Julio Backhoff
Víctor Riquelme

1. Se lanzan dos dados equilibrados, de manera independiente. Sea X la variable aleatoria que corresponde a la suma de los dados.

a) Dé un espacio de probabilidad (Ω, P) que describa adecuadamente el experimento del lanzamiento de dados.

b) Escriba explícitamente X como función de este espacio en $\mathbb{R}$.

c) Escriba explícitamente el evento $\{X = 8\}$ como un subconjunto de Ω.

2. Sea X variable aleatoria con función de distribución acumulada F. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ¿cuál es la distribución de $\alpha X + \beta$?

3. Sea F la función de distribución acumulada de alguna variable aleatoria. Suponga que F es invertible.

a) Sea X variable aleatoria tal que $F_X = F$. ¿Qué variable aleatoria es $F(X)$?

b) Sea Y variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$?

4. Sea X una variable aleatoria con densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de c?

b) ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?

c) Calcule $P(0 < X < 1/2)$.

5. Se escoge un punto al azar en un segmento de largo L, lo cual lo divide en dos sub-segmentos. ¿Cuál es la probabilidad de que el sub-segmento mayor sea a lo más 4 veces más grande que el sub-segmento menor?

6. Usted llega al paradero del autobús a las 10:00. Se sabe que el autobús llegará en algún instante distribuido uniformemente entre las 10:00 y las 10:30. ¿Cuál es la distribución de probabilidad del tiempo de espera del autobús, si a las 10:10 aún no ha pasado?

7. El tiempo de vida de una ampolleta (en horas) sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Se sabe que la ampolleta duró entre a y b horas. ¿Cuál es la distribución del tiempo de vida de la ampolleta, dada esta nueva información?

8. Se dice que una variable aleatoria S tiene una distribución *chi-cuadrado con 1 grado de libertad*, anotado $S \sim \chi_1^2$, si su función densidad es

$$f_S(x) = \frac{x^{-1/2} e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Pruebe que si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ entonces $Z^2 \sim \chi_1^2$.

9. Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha el centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

10. *a*) Sea X variable aleatoria con densidad f_X simétrica, es decir, $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la densidad de la variable aleatoria $|X|$ es $f_{|X|}(x) = 2f_X(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

b) Sea X variable $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calcule $E|X|$.

11. *a*) Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Pruebe que $(X-\mu)/\sigma$ es una normal estándar.

b) Sea $X \sim \mathcal{N}(10, 36)$. Calcule $P(X < 5)$, $P(X > 16)$ y $P(4 < X < 16)$. Use una tabla de la distribución normal estándar.

12. Calcule $E(X)$ si X tiene densidad dada por

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 5/x^2 & x > 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

13. Sea X variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $s(\alpha) = E[(X-\alpha)^2]$. Pruebe que para todo α se tiene que $s(\alpha) \geq \operatorname{var}(X)$ y que se alcanza la igualdad sólo cuando $\alpha = E(X)$.

14. Decimos que la variable aleatoria X tiene *distribución de Pareto* si su densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} c(x_m/x)^{\alpha+1} & x \geq x_m \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $x_m, \alpha > 0$ son parámetros.

a) ¿Cuál es el valor de c?

b) ¿Para cuáles α está bien definida la esperanza de X? Calcule $E(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

c) ¿Para cuáles α está bien definida la varianza de X? Calcule $\operatorname{var}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

d) ¿Cuál es la distribución de $\log(X/x_m)$?

15. Sean $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ variables aleatorias independientes. Pruebe que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

16. *a*) Sean X, Y variables aleatorias independientes, y sea $Z = \text{mín}(X, Y)$. Calcule F_Z en términos de F_X y F_Y.

b) Sean $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\mu)$. ¿Cuál es la densidad de $Z = \text{mín}(X, Y)$?