Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística Otoño 2010

Roberto Cortez
Julio Backhoff
Víctor Riquelme

Pauta Control # 1

P1. *a*) Se extraerán k bolitas en total si y sólo si: (i) justo antes de extraer la k-ésima bolita se habían obtenido $r-1$ rojas, y (ii) al sacar la siguiente se obtuvo la roja que faltaba para completar r. La probabilidad de la condición (i) es

$$\frac{\binom{n}{r-1}\binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k-1}},$$

pues corresponde a la cantidad de formas de escoger $r-1$ bolitas rojas entre n posibles, y a escoger $k-1-(r-1)$ bolitas azules entre las m posibles, dividido por el total de formas de escoger las $k-1$ bolitas entre las $n+m$. Multiplicando por la probabilidad de (ii), se obtiene que la probabilidad buscada es

$$\frac{\binom{n}{r-1}\binom{m}{k-r}(n-r+1)}{\binom{n+m}{k-1}(n+m-k+1)},$$

pues en la k-ésima extracción debe obtenerse una de las $n-(r-1)$ bolitas rojas disponibles, del total de $n+m-(k-1)$ bolitas que quedan en la urna.

b) 1) Siguiendo la indicación, definimos $B_1 = A_1$ y para $i > 1$

$$B_i = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)^c.$$

De esta definición es claro que $B_i \subseteq A_i$. Los B_i son disjuntos de a pares, pues si $i < j$ entonces B_j no intersecta a A_i (fue excluído en la definición de B_j), lo cual implica que tampoco intersecta a B_i. Además, se prueba por inducción que $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$ para todo n. En efecto: el caso base es directo, y para el paso inductivo, si llamemos $C_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$, tenemos:

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = B_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i = (A_{n+1} \cap C_n^c) \cup C_n = A_{n+1} \cup C_n = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$$

De esta igualdad, es directo que $\bigcup_{i=1}^\infty B_i = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Por lo tanto, estos eventos cumplen las propiedades de la indicación. Aplicando el axioma 3 sobre los eventos disjuntos B_i, concluimos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\right) = \sum_{i=1}^\infty P(B_i) \le \sum_{i=1}^\infty P(A_i),$$

donde la ultima desigualdad se debe a que $P(B_i) \le P(A_i)$ para todo i.

2) Llamemos $A = \bigcap_{i=1}^\infty A_i$. Pasando al complemento y utilizando la desigualdad de Boole:

$$P(A^c) = P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i^c\right) \le \sum_{i=1}^\infty P(A_i^c) = 0,$$

pues $P(A_i^c) = 1 - P(A_i) = 0$. Por lo tanto, $P(A^c) = 0$ y entonces $P(A) = 1$, como deseábamos.

3) Aplicando la desigualdad de Boole:

$$P\left(\bigcup_{i=n}^\infty A_i\right) \le \sum_{i=n}^\infty P(A_i),$$

lo cual tiende a 0 cuando n tiende a ∞, pues se trata de la cola de una serie convergente.

P2. *a*) N es el número de repeticiones de un experimento hasta que se obtienen T éxitos, donde un éxito corresponde a que la bolita caiga en la urna $r+1$, lo cual tiene probabilidad $1/(r+1)$. Por lo tanto, N es una variable binomial negativa con parámetros T y $1/(r+1)$. Es decir, su distribución es

$$P(N=n) = \binom{n-1}{T-1}\left(\frac{1}{r+1}\right)^T\left(1-\frac{1}{r+1}\right)^{n-T} = \binom{n-1}{T-1}\frac{r^{n-T}}{(r+1)^n}$$

b) Se sabe que se utilizaron n bolitas, de las cuales T necesariamente están en la urna $r+1$. Por lo tanto, el problema se traduce en repartir $n-T$ bolitas indistinguibles en las r urnas restantes, lo cual sabemos que puede hacerse de

$$\binom{n-T+r-1}{r-1}$$

formas distintas.

c) Como en el ítem anterior, hay que repartir $n-T$ bolitas en r urnas, pero con la restricción de que $X_k \geq m_k$, es decir, en la urna k debe haber al menos m_k bolitas, para todo k. Si llamamos $m = \sum_{k=1}^r m_k$, este problema es equivalente a repartir $n-T-m$ bolitas sin restricciones en r urnas. En efecto: por cada forma de repartir las bolitas en el segundo caso, obtenemos una forma de repartirlas en el primer caso simplemente distribuyendo las m bolitas adicionales entre las urnas, colocando m_k en la urna k. Por lo tanto, la cantidad buscada es

$$\binom{n-T+r-1-\sum_{k=1}^r m_k}{r-1}.$$

d) Como antes, hay $n-T$ bolitas para repartir en r urnas. X_k es la cantidad de éxitos que se obtienen en $n-T$ repeticiones de un experimento, donde el éxito corresponde a que la bolita caiga en la urna k-ésima, lo cual tiene probabilidad $1/r$. Por lo tanto, X_k es una variable binomial con parámetros $n-T$ y $1/r$. Es decir, su distribución es

$$P(X_k=i) = \binom{n-T}{i}\left(\frac{1}{r}\right)^i\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-T-i} = \binom{n-T}{i}\frac{(r-1)^{n-T-i}}{r^{n-T}}.$$

La distribución de X_1+X_2 se obtiene análogamente, pero ahora el éxito corresponde a que la bolita caiga en la urna 1 ó la urna 2, lo cual tiene probabilidad $2/r$. Luego, X_1+X_2 tiene distribución binomial con parámetros $n-T$ y $2/r$, es decir,

$$P(X_1+X_2=i) = \binom{n-T}{i}\left(\frac{2}{r}\right)^i\left(1-\frac{2}{r}\right)^{n-T-i}.$$

P3. *a*) Consideremos $\Lambda = \{L, N\} \times \{C, O\}$, donde L denota lluvia y N denota ausencia de lluvia, mientras que C denota que el paraguas está en casa y O que está en la oficina. Λ corresponde a los posibles resultados de un día del experimento, y $\Omega = \Lambda \times \Lambda \times \cdots = \Lambda^{\mathbb{N}}$ es un espacio muestral que representa el experimento completo.

En este Ω, los eventos L_n y C_n son

$$\begin{aligned} L_n &= \Lambda \times \cdots \times \Lambda \times \{LC, LO\} \times \Lambda \times \cdots \\ C_n &= \Lambda \times \cdots \times \Lambda \times \{LC, NC\} \times \Lambda \times \cdots . \end{aligned}$$

Otros espacios Ω también pueden representar adecuadamente el experimento, pero no siempre permiten escrituras simples de L_n y C_n.

b) Condicionando en la ubicación del paraguas el día anterior, tenemos:

$$p_n = P(C_n|C_{n-1})P(C_{n-1}) + P(C_n|C_{n-1}^n)P(C_{n-1}^c).$$

La primera probabilidad condicional corresponde a la probabilidad de que el paraguas permanezca en casa de un día al siguiente, lo cual ocurre cuando llueve, o bien cuando no llueve y el señor N olvida el paraguas en casa, o bien cuando no llueve y el señor N no olvida el paraguas en ambos trayectos, es decir

$$P(C_n|C_{n-1}) = r + (1-r)(q + (1-q)^2).$$

La segunda probabilidad condicional corresponde a la probabilidad de que el paraguas pase de la oficina a la casa de un día al siguiente, lo cual ocurre cuando llueve, o bien cuando no llueve y el señor N no olvida el paraguas en su trayecto a casa, es decir

$$P(C_n|C_{n-1}) = r + (1-r)(1-q).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_n &= \left[r + (1-r)(q + (1-q)^2)\right] p_{n-1} + \left[r + (1-r)(1-q)\right](1 - p_{n-1}) \\ &= \left[r + (1-r)(1-q)\right] + \left[(1-r)(q + (1-q)^2 - (1-q))\right] p_{n-1} \\ &= \alpha + \beta p_{n-1} \end{aligned}$$

con $\alpha = 1 - q + qr$ y $\beta = q^2(1-r)$.

c) Como el paraguas está en casa al comienzo del día 1, se tiene que $p_1 = 1$. Usando que $p_n = \alpha + \beta p_{n-1}$, tenemos:

$$\begin{aligned} p_2 &= \alpha + \beta \\ p_3 &= \alpha + \beta p_2 = \alpha + \beta(\alpha + \beta) = \alpha + \alpha\beta + \beta^2 \\ p_4 &= \alpha + \beta p_3 = \alpha + \beta(\alpha + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 \\ &\vdots \\ p_n &= \beta^{n-1} + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} \beta^k. \end{aligned}$$

Como $\beta = q^2(1-r) \in (0,1)$, se tiene que $\beta^{n-1} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además, la suma anterior es una serie geométrica, por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \alpha \frac{1}{1-\beta} = \frac{1 - q + qr}{1 - q^2 + q^2 r}.$$

d) El evento M_n corresponde a que llueva y que el paraguas no esté en la casa (si lo estuviera, el señor N se lo lleva consigo y no se moja). Por lo tanto, por independencia se tiene que

$$P(M_n) = P(L_n C_n^c) = P(L_n)P(C_n^c) = r(1 - p_n).$$

Tomando límite y reemplazando $q = r = 1/2$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n) = r(1 - \lim_{n\to\infty} p_n) = r\left(1 - \frac{1 - q + qr}{1 - q^2 + q^2 r}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}\right) = \frac{1}{14}.$$

Es decir, cuando han pasado muchos días, la probabilidad de que el señor N se moje es de $1/14$.