Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística
Otoño 2010

GUÍA EJERCICIOS # 1

Roberto Cortez
Julio Backhoff
Víctor Riquelme

1. Sean E y F eventos.

a) Pruebe que $P(EF^c) = P(E) - P(EF)$.

b) Pruebe que $P(E^cF^c) = 1 - P(E) - P(F) + P(EF)$.

c) Pruebe que la probabilidad de que exactamente uno de ellos ocurra es igual a $P(E) + P(F) - 2P(EF)$.

2. Suponga que un experimento se realiza n veces. Para cualquier evento E del espacio muestral, sea $n(E)$ el número de veces que E ocurre, y definamos $f(E) = n(E)/n$. Pruebe que $f(\cdot)$ satisface los axiomas de probabilidad.

3. Considere un experimento cuyo espacio muestral tiene una cantidad infinita numerable de elementos. Pruebe que no todos los puntos (singletons) pueden tener la misma probabilidad. ¿Es posible que todos los puntos tengan probabilidad estrictamente positiva?

4. Sean $A_1, A_2, \dots$ eventos.

a) Pruebe la desigualdad de Boole:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Indicación: construya eventos disjuntos $B_1, B_2, \dots$ tales que $B_i \subseteq A_i$ para todo $i \geq 1$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

b) Pruebe que si $P(A_i) = 1$ para todo $i \geq 1$, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1.$$

5. Dos dados equilibrados se lanzan sucesivamente n veces. Defina un espacio muestral y una probabilidad adecuados para este experimento. Calcule la probabilidad de que aparezca al menos un doble 6. ¿Cuál es el primer n tal que esta probabilidad es de 1/2 ó más?

6. Un dado se lanza hasta que aparezca el número 6, momento en el cual se detiene el experimento.

a) Defina un espacio muestral Ω adecuado para el experimento.

b) Considere el evento o suceso E_n, para denotar que fueron necesarios n lanzamientos antes de obtener el primer 6. ¿Qué elementos de Ω pertenecen a E_n?

c) ¿Qué representan los eventos o sucesos $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n$ y $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right)^c$?

7. Un mazo inglés (52 cartas) se revuelve y se van mostrando las cartas una por una. ¿Cuál es la probabilidad de que la catorceava carta sea un as? ¿Cuál es la probabilidad de que el primer as aparezca en la catorceava carta?

8. Una urna contiene n bolitas blancas y m negras.

a) Se sacan dos bolitas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

b) Se saca una bolita al azar y se devuelve a la urna, luego se saca una segunda bolita al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolitas sean del mismo color?

c) Pruebe que la probabilidad del segundo caso es siempre mayor.

9. 12 personas se reparten en 3 comités de tamaños 3, 4 y 5 respectivamente. ¿De cuántas maneras se pueden formar los comités?

10. Una empresa cuenta con 15 trabajadores: 5 ingenieros y 10 técnicos. La empresa produce 2 tipos de productos A y B. El producto A requiere 3 ingenieros y 6 técnicos. El producto B requiere 2 ingenieros y 4 técnicos. ¿De cuántas maneras se pueden asignar los puestos de trabajo en la empresa?

11. En un curso de 40 alumnos deben formarse tres equipos de baby fútbol (5 jugadores) y uno de vóleibol (6 jugadores). ¿De cuántas formas pueden armarse los equipos si

a) los equipos de fútbol son distinguibles entre sí?

b) los equipos de fútbol son indistinguibles entre sí?

12. Una mano de póker consta de 5 cartas escogidas al azar del total de 52 que posee el mazo inglés. Calcule la probabilidad de obtener:

a) Color: las 5 cartas son de la misma pinta.

b) Un par: dos cartas tienen el mismo número entre sí, y las tres restantes tienen números distintos al resto y entre sí.

c) Dos pares: dos cartas tienen el mismo número entre sí, otras dos poseen el mismo número entre sí, pero distinto al anterior, y la última tiene un numero distinto al resto.

d) Un trío: tres cartas tienen el mismo número entre sí, y las dos restantes tienen un número distinto al resto y entre sí.

e) Póker: cuatro cartas tienen el mismo número.

13. Un tren, en el que se encuentran n pasajeros, debe efectuar m paradas. ¿De cuántos maneras pueden distribuirse los pasajeros entre estas paradas, suponiendo que

a) los pasajeros son distinguibles entre sí?

b) los pasajeros son indistinguibles entre sí?

c) los pasajeros son indistinguibles entre sí y se sabe que en la parada i-ésima bajan al menos n_i, para todo $i = 1, \ldots, m$? Suponga $\sum_{i=1}^{m} n_i \leq n$.

14. Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen n turnos de noche y n turnos de día. De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren de noche y $0 < b < n$ prefieren de día. El resto de los trabajadores están indiferentes entre trabajar de noche o de día. Si los turnos se reparten al azar, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda el turno que quería.

15. Una urna contiene n bolitas rojas y m azules. Se extran bolitas sucesivamente hasta que se hayan obtenido r rojas, con $r \leq n$. Calcule la probabilidad de que se extraigan k bolitas en total.

16. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define F_n como el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{1, \ldots, n\}$. Dado $0 \leq k \leq n$, se define

$$A_k = \{f \in F_n \,/\, |\{i/f(i) = i\}| = k\},$$

es decir, A_k es el conjunto de funciones en F_n con exactamente k puntos fijos. Sea $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

a) Pruebe que

$$|A_k| = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$$

y concluya que $|A| = n^n - (n-1)^n$.

b) Se escoje una función al azar en F_n. Calcular la probabilidad de que esa función tenga exactamente k puntos fijos, es decir, que pertenezca a A_k.

c) Calcular p_n, la probabilidad de escoger al azar una función con algún punto fijo.

d) Pruebe que

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{e-1}{e}.$$

17. En una laguna hay $2n+1$ piedras que sobresalen del agua, puestas en fila, y numeradas $-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n$. Una ranita ubicada inicialmente en la piedra 0 puede saltar una piedra hacia adelante o una piedra hacia atrás. La ranita realiza exactamente n saltos. Dado $k \in \{-n, \ldots, n\}$, ¿de cuántas formas puede haber terminado en la ranita en la piedra k?

18. Un bicho se mueve en el plano $\mathbb{Z}^2$ dando pasos unitarios ya sea hacia arriba o hacia la derecha.

a) ¿Cuántos caminos o recorridos posibles tiene el bicho para ir de $(0,0)$ a $(7,7)$?

b) ¿Cuántos recorridos hay desde $(2,7)$ a $(9,14)$?

c) ¿Cuántos recorridos hay desde $(0,0)$ a (m,n), donde $m,n>0$?

d) ¿Cuántos recorridos hay desde $(0,0)$ a (m,n), donde $m,n>0$, que pasen por el punto (p,q), con $p\leq m$ y $q\leq n$?

19. Una mujer tiene n llaves, de las cuales sólo una abre la puerta. Si va probando las llaves de a una al azar, descartando aquellas que no abren la puerta, ¿cuál es la probabilidad de que abra la puerta en el k-ésimo intento? Si no descarta las llaves que no funcionan, ¿cuál es esta probabilidad?

20. Considere la elección al azar de una permutación de los números $1,2,\ldots,n$, de tal manera que Ω es el espacio equiprobable de todas las permutaciones. Sea $A_i\subseteq\Omega$ el suceso "el número i está en el lugar $i+1$ de la permutación" para $i=1,\ldots,n-1$ y A_n el suceso "el número n está en el lugar 1 de la permutación".

a) Calcule $P(A_i)$ y $P(A_iA_j)$, $i\neq j$, $i,j=1,\ldots,n$.

b) Calcule $P(A_i\cup A_j)$, donde $1\leq i,j\leq n$ e $i\neq j$.

21. Sea (Ω,P) un espacio de probablidad, y sea F un evento tal que $P(F)>0$. Definimos para todo evento $E\subseteq F$ la función $\tilde{P}(E)=P(E|F)$. Pruebe que $(F,\tilde{P})$ es un espacio de probabilidad.

22. Un matrimonio posee dos hijos. Si se sabe que al menos uno de ellos es varón, ¿cuál es la probabilidad de que ambos lo sean?

23. Se dispone de dos urnas, I y II. En la urna I hay m_1 bolitas blancas y n_1 negras; en la urna II hay m_2 blancas y n_2 negras. En un primer esquema de extracción se selecciona una urna (la urna I con probabilidad p_1 y la II con probabilidad p_2) y luego, de la urna seleccionada se extrae una bolita al azar. En el segundo esquema las bolitas de ambas urnas se juntan y se extrae al azar una bolita. Calcule la probabilidad de obtener una bolita blanca en cada uno de los esquemas descritos y muestre que ambos valores coinciden si p_1 y p_2 se escogen proporcionales a los tamaños (número total de bolitas) de las respectivas urnas.

24. Un comerciante recibe un lote de relojes importados de Asia. El lote proviene, ya sea de una fábrica en Taiwán o bien de una fábrica de Singapur. La fábrica de Singapur produce en promedio un reloj defectuoso por cada 200, pero la de Taiwán sólo 1 entre 1000. El comerciante examina un reloj y constata que funciona. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo reloj examinado funcione?

25. Un complejo sistema de ingeniería posee un interruptor automático de seguridad, que debe activarse en condiciones de falla del sistema. Suponga que la probabilidad de que el interruptor se active, dado que hay una falla es 0.99 y que la probabilidad de no activarse, dado que no hay falla también es 0.99. Finalmente, suponga que la probabilidad de que el sistema falle es 0.001. Calcule la probabilidad de que el sistema haya fallado, sabiendo que el interruptor de seguridad se activó.

26. Un ratoncito escoge al azar uno de tres posibles laberintos. Si escoge el primero, la probabilidad de que encuentre su queso de premio es de $1/2$, si escoge el segundo la probabilidad es de $1/4$, y si escoge el tercero la probabilidad es de $1/8$. ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre su queso? Si se sabe que lo encontró, ¿cuál es la probabilidad de que haya escogido el primer laberinto?

27. Sean $E_1,\ldots,E_n$ eventos independientes. Pruebe que

$$P(E_1\cup\cdots\cup E_n)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(E_i)).$$

28. Se lanza una moneda equilibrada dos veces. Sea A el evento en que la primera moneda cae cara, B el evento en que la segunda moneda cae cara, y C el evento en que ambas monedas caen para el mismo lado. Muestre que estos tres eventos son independientes de a pares (es decir, A independiente de B, B independiente de C y C independiente de A), pero no son independientes en conjunto.

29. Un panel conformado por 3 jueces condena a una persona cuando al menos 2 de ellos votan que es culpable. Cuando la persona es efectivamente culpable, cada juez vota que lo es con probabilidad 0,7, de manera independiente, mientras que si la persona es inocente, esta probabilidad es de 0,2. Si el 70 % de los enjuiciados son culpables, y se escoge una persona al azar. Calcule la probabilidad de que el tercer juez vote que es culpable dado que:

a) el primer y segundo juez votaron que es culpable;

b) el primer y segundo juez votaron distinto;

c) el primer y segundo juez votaron que no es culpable.

Sea E_i, $i = 1, 2, 3$, el evento que el juez i vota culpable. ¿Son independientes estos eventos?

30. Sea $S = \{1, \ldots, n\}$ y suponga que A y B son subconjuntos extraídos de manera independiente y al azar entre todos los posibles subconjuntos de S.

a) Pruebe que $P(A \subseteq B) = (3/4)^n$. Indicación: condicione en la cantidad de elementos de B.

b) Pruebe que $P(AB = \phi) = (3/4)^n$.

31. Se lanza n veces, de manera independiente, una moneda que tiene probabilidad p de salir cara, con $0 < p < 1$. Sea X la variable aleatoria que representa la diferencia entre el número de caras y el número de sellos obtenidos.

a) Describa un espacio de probabilidad adecuado para este experimento, incluyendo el espacio muestral Ω y la probabilidad P.

b) Describa la variable aleatoria X como una función de Ω en $\mathbb{R}$. ¿Cuál es el rango de X?

c) Calcule la distribución de X.

d) Calcule la distribución de la variable aleatoria $Y = (X + n)/2$. ¿Qué tipo de variable es Y?

32. Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros (n, p). Dado $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ¿cuál es el valor de p que maximiza $P(X = k)$?

33. Un estudiante de probabilidades dispone de una guía de n ejercicios para prepararse para la prueba, que constará de tres problemas. De éstos, uno será escogido al azar entre los n que componen la guía de ejercicios. Si el día de la prueba el estudiante se encuentra con un problema que ya resolvió, lo contestará correctamente con probabilidad 1, mientras que si se encuentra con un problema que no ha visto, lo contestará correctamente con probabilidad $p = k/n$, donde k es la cantidad de ejercicios de la guía resueltos previamente. El estudiante contesta cada pregunta de manera independiente a las otras. Sea X a la variable aleatoria que representa la nota del estudiante, la cual será un 1,0 si contesta mal las tres preguntas, un 3,0 si contesta sólo una bien, un 5,0 si contesta bien dos, y un 7,0 si contesta bien todas.

a) Calcule la probabilidad que el estudiante conteste bien la pregunta escogida al azar de la guía.

b) Encuentre la distribución de X.

c) Para $n = 33$, ¿cuál es el mínimo k tal que la probabilidad de sacarse un 1,0 es de a lo más 1/16?