Clase Auxiliar n° 11:Probabilidades y estadística

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

18 de junio del 2010

P1. Función característica de un vector normal multivariado Considere el vector normal multivariado $X = (x_1, \ldots, x_n) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Pruebe que los $(x_i)_{i=1\ldots n}$ son independientes ssi Σ es una matriz diagonal (es decir $Cov(x_i, x_j) = 0 \;\; \forall i \neq j$).
Indicación: Recuerde que X es un vector aleatorio ssi su función característica está dada por

$$\Psi(\nu) = e^{i\nu^t\mu - \dfrac{\nu^t\Sigma\nu}{2}} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R}^n$$

y que si X, Y son variables aleatorias entonces son independientes ssi $\Psi_{XY}(\nu) = \Psi_X(\nu_1)\Psi_Y(\nu_2)$, con $\nu = (\nu_1, \nu_2)$

P2. Covarianza cero no implica independencia
Considere $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ e $Y = X^2$. Pruebe que $Cov(X, Y) = 0$ pero X no es independiente de Y

P3. No cualquier cosa es un vector normal multivariado

a) Considere $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $f(x) = \dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. Demuestre que $\exists a > 0$ tal que $4\int_a^\infty x^2 f(x) = 1$
Definamos $Y = \begin{cases} -X & |X| > a \\ X & |X| \leq a \end{cases}$ con a el recién encontrado.

b) Calcule $Cov(X, Y)$

c) Calcule $\mathbb{P}(X > a, Y > a)$ y $\mathbb{P}(X > a, Y > a)$

d) Concluya que (X, Y) no es un vector normal multivariado

P4. Distribuciones condicionales para la normal bivariada
Considere $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ con $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$. Definimos la correlación de X, Y como $\rho = \frac{Cov X,Y}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$

a) Demuestre que $X = \sigma_x\rho U + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_x V$, con $U, V \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e independientes, y $Y = \sigma_y U$

b) Calcule $\mathbb{E}(X|Y = y)$

c) Calcule $Var(X|Y = y)$
Indicación Recuerde que si $X \in \mathbb{R}^n \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ y A es una matriz de mxn entonces $AX \sim \mathcal{N}(A\mu, A\Sigma A^T)$