Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Guía Control 3 MA3403

Profesor: Servet Martinez

Auxiliares: Gonzalo Contador, Gonzalo Mena.

1) Nos proponemos dar una demostración alternativa del teorema central del límite. Recuerde que en clases se vió que dos variables aleatorias tienen igual ley de distribución si y sólo si sus funciones características son iguales para todo t

a) Sea $X \sim Normal(0,1)$. Pruebe que su función característica está dada por

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{-t^2}{2}}$$

b) Pruebe que, para cualquier variable aleatoria Y con media 0 y varianza 1, su función característica está dada por:

$$\varphi_Y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

donde $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{o(t^2)}{t^2} = 0$. Puede servirle hacer un desarrollo de Taylor en torno a $t = 0$.

c) Ahora, considere $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ secuencia i.i.d. de media μ y varianza σ^2 y $\bar{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Calcule la función característica de $Y_n = \sqrt{n}\frac{(\bar{X_n} - \mu)}{\sigma}$

d) Concluya el resultado deseado. (Recuerde que $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n = e^a$

2) Sea X variable aleatoria, y denotamos por $\psi_X(t)$ su función generadora de momentos. Definimos $M_X(t) := ln(\psi_X(t))$. Pruebe que

$$M'_X(0) = -\mathbb{E}(X)$$

$$M''_X(0) = \mathbb{V}ar(X)$$

3) Sea $X \sim Uniforme[0,1]$, $Y \sim Bernoulli(X)$. Calcule la esperanza de Y.

4) Sea X v.a. de media 0 y varianza σ^2. Pruebe que, dado $a > 0$, $\forall b > 0$ se tiene

$$\mathbb{P}(X > a) \leqslant \frac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}$$

y concluya que $\mathbb{P}(X > a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$

5) Sea X v.a. absolutamente contínua con función de densidad simétrica respecto a cierto $a \in \mathbb{R}$, esto es, $f_X(a+x) = f_X(a-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\varphi_X(t) = h(t)e^{iat}$, donde h es una función a valores reales. (Indicación: Puede ser útil hacer primero el caso $a = 0$ y luego generalizar)

6) Sean $\{E_n\}$ secuencia iid de v.a. tomando un numero finito de valores. Para e tal que $\mathbb{P}(E_n = e) = p_e$ definimos $R_n(e) = |\{i = 1...n : E_i = e\}|$. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(e)}{n} = p_e$$

7) Sean X,Y independientes con distribución $Normal(0, \sigma^2)$. Considere el cambio a coordenadas polares:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\Theta = arctan(\frac{Y}{X})$$

Calcule la distribución conjunta de R y Θ, pruebe que son independientes y que $\Theta \sim Uniforme(0, 2\pi)$

8) Sea $X \sim Geometrica(p)$, $\{Y_i\}_i$ secuencia iid e independiente de X, con $\mathbb{E}(Y_i) = \mu$. Muestre que $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{X} Y_i) = \frac{\mu}{p}$