

Clase Auxiliar n° 7: Probabilidades y estadística

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

4 de junio del 2010

P1. Función generadora de momentos

- a) Sean X, Y v.a. poisson independientes de parámetros λ, ν respectivamente. Encuentre la función generadora de momentos de X e Y y úsela para determinar la media y varianza de ambas variables. Deduzca que $X + Y$ es una v.a poisson de parámetro $\lambda + \nu$.
- b) Muestre que si $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ y X es independiente de Y entonces $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

P2. Algunas desigualdades importantes

- a) Demuestre que si X es v.a. positiva y $c > 0$ entonces $\mathbb{P}(X > c) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{c}$
- b) Sea X v.a. con media $\mu \neq 0$ y $0 < \sigma^2$. Definamos las cantidades $r = \frac{|\mu|}{\sigma}$, $D = \left| \frac{X - \mu}{\mu} \right|$. Pruebe que para todo $\alpha > 0$ se tiene

$$\mathbb{P}(D \leq \alpha) \geq 1 - \frac{1}{r^2 \alpha^2}$$

- c) Pruebe que si X tiene media cero y varianza $0 < \sigma^2$ entonces para cualquier $t > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 1}$$

P3. Aplicaciones de los teoremas límite

- a) Demuestre que para $\epsilon > 0$ cualquiera se cumple:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n(1+\epsilon) \rfloor} \frac{n^k}{k!} = 1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n(1-\epsilon) \rfloor} \frac{n^k}{k!} = 0$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

Indicación: Considerar variables Poisson. Para los dos primeros límites usar el teorema débil de los grandes números, y para el tercero el teorema central del límite.

- b) Pruebe que la sucesión $X_n \rightarrow 0$ en probabilidad si y sólo si $\mathbb{E} \left(\frac{|X_n|}{1 + |X_n|} \right) \rightarrow 0$