Prof: Servet Martínez
Aux: Bolivar Díaz
Francisco Silva

Pauta C2

P1 a) N_r se puede ver como la 1era vez que se tienen r éxitos cuando se realizan experimentos de Bernoulli independientes. Luego $\mathbb{P}(N_r = k)$ va a ser tal q' sea la probabilidad de que hayan r éxitos en los k lanzamientos y justo en el k-ésimo sea un éxito (. . .) falta fijar los otros $r-1$ éxitos (ahí . . . combinatorial)

$$\mathbb{P}(N_r = k) = \underbrace{\binom{k-1}{r-1}}_{\text{ordenamientos de los } r-1 \text{ éxitos pues el } k\text{-ésimo es } r} \underbrace{p^r}_{r \text{ éxitos ind.}} \underbrace{(1-p)^{k-r}}_{k-r \text{ fracasos.}}$$

b) T_1 indica la 1era vez que ocurre un éxito y T_2 es la 1era vez q' ocurre un éxito después del 1ero q' había ocurrido. Luego $\mathbb{P}(T_1=j, T_2=k) = \underbrace{(1-p)^{j-1}}_{j-1 \text{ fracasos}} \underbrace{p}_{\text{éxito en } j} \underbrace{(1-p)^{k-j-1}}_{\text{fracasos después de } j} \underbrace{p}_{\text{éxito en } k}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(T_1=j, T_2=k) = (1-p)^{j+k-2} p^2$ (1)

de a) $\mathbb{P}(T_1=j) = \mathbb{P}(N_1=j) = p(1-p)^{j-1} \to$ Geométrica(p) (2)

de (1) y (2) concluimos que son independientes y q' T_2 también es Geométrica.

P2 a) $X_1 \sim U[0,1] \Rightarrow F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ y $f_{X_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$

Nos piden $X_2 := \sqrt{X_1}$
calcule la f.d.p de

la función $g(x) = x^2$ es creciente

Pues X_1 toma valores entre cero y uno.

$$F_{X_2}(x) \stackrel{\Delta}{=} \mathbb{P}(X_2 \le x) = \mathbb{P}(\sqrt{X_1} \le x) \stackrel{\downarrow}{=} \mathbb{P}(|X_1| \le x^2) \stackrel{\downarrow}{=} \mathbb{P}(X_1 \le x^2)$$
$$= F_{X_1}(x^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 \le 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x^2 \le 1 \\ 1 & \text{si } x^2 \ge 1 \end{cases}$$

luego $\boxed{f_{X_2}(x) = \dfrac{dF_{X_2}(x)}{dx} = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \sim \end{cases}}$

b) $f_{S_1}(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & x \ge 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$ $\quad f_{S_2}(x) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} & x \ge 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$

luego $\mathbb{P}(S_1 \ge S_2) = \displaystyle\int_0^\infty \mathbb{P}(S_1 \ge S_2 \mid S_1 = s)\lambda_1 e^{-\lambda_1 s} ds \stackrel{\text{indep.}}{=} \lambda_1 \int_0^\infty \left[\int_0^s \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du\right] e^{-\lambda_1 s} ds$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-\lambda_2 u}}{\lambda_2}\right]_0^s e^{-\lambda_1 s} ds = \lambda_1 \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_2 s}) e^{-\lambda_1 s} ds$$

$$= \lambda_1 \Big[\underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda_1 s} ds}_{1} - \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} ds\Big] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}\Big|_0^\infty = \boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}$$