**Universidad de Chile** **Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**

# Control 1, 28 de Agosto de 2006

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Bolívar Díaz L., Francisco Silva A.

**P1.-** a) Considere $\Omega = \mathbb{Z}$. Sea $\mathcal{C} = \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty \vee |A^c| < \infty\}$. Pruebe que $\mathcal{C}$ es un álgebra en $\Omega$ y que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ (donde $\sigma(\mathcal{C})$ es la $\sigma$-álgebra engendrada por $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ es el conjunto de las partes de $\mathbb{Z}$).

Nota. $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto $A$.

b) Considere ahora $\Omega = \mathbb{R}$. Definimos $\mathcal{B} = \{A \subseteq \Omega : |A|$ es numerable $\vee |A^c|$ es numerable$\}$. Pruebe que $\mathcal{B}$ es $\sigma$-álgebra.

Nota. Recuerde que un conjunto es numerable si es finito o está en biyección con el conjunto de los naturales.

**P2.-** a) Considere un espacio de probabilidad con medida de probabilidad $P$. Sean $A, B$ dos eventos tal que $P(A) > 0, P(B) > 0$. Decimos que $B$ repele a $A$ si $P(A|B) < P(A)$ y que $B$ atrae a A si $P(A|B) > P(A)$. Pruebe que si $B$ atrae a $A$ entonces $A$ atrae a $B$ y $B^c$ repele a $A$.

b) Se lanza un dado (que tiene 6 lados) y se denota por $i$ el resultado obtenido (es decir $i$ indica el lado en que cae el dado; $i$ toma los valores $1, \ldots 6$ de manera equiprobable). Enseguida se tiran tres monedas (cuyo resultado es cara ó sello) de manera independiente y con probabilidad de obtener cara igual a $\frac{i}{6}$, en cada una de las monedas. Calcule la probabilidad de que $i$ sea impar si es que al menos salió un sello en las tres monedas.

**P3.-** a) Considere los números de $n$ dígitos, (donde los dígitos están en base 10 es decir son $0, \ldots, 9$). Coloque todos estos números de $n$ dígitos en una tómbola y extraiga al azar uno de ellos de manera equiprobable. Calcule:

i) La probabilidad de sacar un número que no tenga 2 dígitos consecutivos iguales.

ii) La probabilidad de obtener un número que tenga exactamente $i$ ceros (siendo $0 < i < n$).

b) Sea $S = \{1, \ldots, n\}$. Considere el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ siendo $\Omega = \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$. Es decir, cada punto del espacio $\Omega = \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ es una pareja $(C, D)$ donde $C, D$ son subconjuntos de $S$. La medida de probabilidad $P$ es la equiprobable, es decir se define en los singletons por $P(\{(C, D)\}) = \frac{1}{2^{2n}}$, $\forall (C, D) \in \Omega$. Pruebe que $P\{(C, D) \in \Omega : C \subseteq D\} = (\frac{3}{4})^n$.

Hint: Condicione con respecto a la cardinalidad del conjunto B.

**Tiempo:** 2:30 horas. **Nota:** Todas las preguntas tienen igual valor.