# Clase Auxiliar n° 3:Probabilidades y estadística

Profesor: Servet Martínez
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

16 de abril del 2010

**P1.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad.

*a*) Muestre que si $A \in \mathcal{F}$ es independiente de si mismo entonces $\mathbb{P}(A)$ es 0 ó 1

*b*) Muestre que si $\mathbb{P}(A)$ es 0 ó 1 entonces $A$ es independiente de cualquier $B$ en $\mathcal{F}$

*c*) Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \cap B) > 0$. Demuestre que la igualdad $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$ se tiene si y sólo si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

*d*) Sean $A_n, B_n$ dos sucesiones decrecientes de eventos ($A_n \subseteq A_{n+1}, B_n \subseteq B_{n+1}$ para todo $n$). Demuestre que si $A_n$ es independiente de $B_n$ para todo $n$ entonces:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n)\mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \cap B_n)$$

*e*) Consideremos una secuencia de eventos $A_n \in \mathcal{F}$ que es disjunta ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$). Probar que existe una subsucesión $n_k$ tal que $\mathbb{P}(A_{n_k}) \to 0$.

**P2.** *a*) Considere el "juego" de lanzar una moneda cargada hasta que aparezca sello (en ese momento el juego se acaba). Demuestre que $\mathbb{P}(\text{El juego termina}) = 1$

*b*) Demuestre que si se lanza repetidamente una moneda(por simplicidad no cargada), y se elige alguna secuencia finita de caras y sellos, entonces con probabilidad 1 esa secuencia aparecerá en algún momento.

*c*) Considere un paseo aleatorio en $\{0 \dots N\}$ partiendo de $k$. Es decir, en el instante inicial una persona se encuentra en $k$, y en cada etapa, si se encuentra en la etapa $i$ puede moverse a $i+1$ o $i-1$ con la misma probabilidad. El paseo termina cuando se llega a 0 o $N$. Demuestre que con probabilidad 1 el paseo termina en una cantidad finita de etapas.

**P3.** Un avión está perdido, y es igualmente probable que se encuentre en cada una de un número $k$ de regiones regiones. Sea $1 - \beta_i$ la probabilidad de que el avión sea encontrado luego de una búsqueda en la región $0 < i \leq k$, dado que el avión efectivamente se encuentra en esa región. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión se encuentre en la región $i$ ($0 < i \leq k$) dado que la búsqueda en la región 1 fue infructuosa?

**P4.** Un número $N$ (aleatorio) de dados es lanzado. Sea $A_i$ el evento $N = i$ y asuma que $P(A_i) = \frac{1}{2^i}$. Sea $S$ la suma de los dados.

*a*) $N = 2$ dado que $S = 4$

*b*) $S = 4$ dado que $N$ es par

*c*) $N = 2$, dado que $S = 4$ y el primer lanzamiento fue 1