

PROFESOR: SERVET MARTÍNEZ

AUXILIARES: ANDRES FIELBAUM, TOMAS SPENCER

P1.- Sea $A = \{1, \dots, n\}$.

- a) Se eligen con reposición, independientemente y con ley equiprobable, dos puntos x e y de A . Calcular la probabilidad que $x = y$.
- b) Se eligen un subconjunto B de A y un punto x de A , con reposición, de manera independiente y equiprobable, es decir la elección de x es con ley equiprobable en A y la elección de B es con ley equiprobable en $\mathcal{P}(A)$ (cada subconjunto de A , incluyendo el conjunto vacío, tiene la misma probabilidad de ser escogido en $\mathcal{P}(A)$). Calcule la probabilidad que $x \in B$.

Recuerde que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, y como Hint en b) puede condicionar con respecto a la cardinalidad de B .

P2.- Cierta enfermedad se transmite en forma genética de los padres a los hijos, del siguiente modo:

- Si sólo el padre presenta la enfermedad, el hijo tendrá probabilidad β de presentarla ($\beta \in (0, 1)$);
- Si sólo la madre presenta la enfermedad, el hijo tendrá probabilidad α de presentarla ($\alpha \in (0, 1)$);
- Si ambos padres la presentan, el hijo la presentará con probabilidad 1.

Además, cada uno de los padres tiene probabilidad p de presentar la enfermedad, en forma independiente entre ellos ($p \in (0, 1)$).

- a) Si un tipo está enfermo, ¿Cuál es la probabilidad de que la enfermedad le haya sido transmitida sólo por la madre?
- b) Si hay dos hermanos, y uno de ellos está enfermo, ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hermano también esté enfermo?

P3.- a) Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Considere $\{B_i : i = 1, \dots, n\}$ una partición medible de Ω , es decir,

- * $B_i \in \mathcal{B} \ \forall i = 1, \dots, n$;
- * $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$;
- * $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.

Pruebe que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathbb{P}(B_i) \leq \frac{1}{n}$.

- b) Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ se dice **no atómico** si para todo $B \in \mathcal{B}$ con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists C \in \mathcal{B}, C \subseteq B$, tal que $0 < \mathbb{P}(C) < \mathbb{P}(B)$.

Pruebe que si $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ es no atómico y si $x \in \Omega$ verifica $\{x\} \in \mathcal{B}$, entonces $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$. Concluya que si Ω es un conjunto numerable con la σ -álgebra de las partes, el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ no puede ser no atómico.

Tiempo: 3:00 horas.

Nota: Todas las preguntas tienen igual valor y al interior de ellas cada parte tiene el mismo valor.