PAUTA P2 C1

a)

Definamos los siguientes eventos:

A = "Sale un 6 en el dado"

B = "La bola negra fue extraída"

Claramente nos están pidiendo $\mathbb{P}(A|B)$. Pero sabemos que eso es igual a $\mathbb{P}(B|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$. Calculemos entonces los valores de esos términos:

Como el dado es perfecto, tenemos que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$

Además, como el 6 es par, tenemos que dado A, se sacarán dos bolas de la caja. Luego, para calcular $\mathbb{P}(B|A)$, lo hacemos por casos favorables dividido por casos totales, notando que el evento es simplemente el de que sacando dos bolitas de la urna, la negra sea una de ellas. Los casos totales son claramente $\binom{n+1}{2}$, pues saldrá un subconjunto de tamaño 2 de todos los subconuntos de tamaño 2 que hay. Para los casos favorables, notamos que si una bola es la negra, la otra puede ser cualquier blanca, luego tengo n casos favorables, uno por cada bola blanca. Así, $\mathbb{P}(B|A) = \frac{n}{\binom{n+1}{2}}$.

Por último, para B utilizamos probabilidades totales. Así, definamos el evento Q = "Sale un par en el dado" (claramente Q^c="sale un impar en el dado"). Así, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|Q)\mathbb{P}(Q) + \mathbb{P}(B|Q^c)\mathbb{P}(Q^c)$. Evidentemente, $\mathbb{P}(Q) = \mathbb{P}(Q^c) = \frac{1}{2}$.Además, $\mathbb{P}(B|Q) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{n}{\binom{n+1}{2}}$ (pues sabiendo que salió un seis o sabiendo que salió un par cualquiera, el experimento será el mismo, i.e., sacar dos bolas de las n+1 y ver si salió la negra). Para finalizar, notemos que dado Q^c, el evento de que salga la negra tiene sólo un caso favorable (pues estamos sacando sólo una bola y hay sólo una bola negra), y n+1 casos totales. Luego, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}[\frac{n}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{n+1}]$.

Finalmente, juntando todo, concluimos que $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{n}{\binom{n+1}{2}}\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}[\frac{n}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{n+1}]} = \frac{2}{9}$. *(3 ptos, no es necesario simplificar la expresión, es decir, escribir la última igualdad, para obtener el puntaje completo).*

b)

Calculemos los casos favorables y los casos totales:

Para los casos totales, notemos que son todos los subconjuntos ordenados de tamaño k del conjunto de todas las bolitas, que tiene $n+r$ elementos, luegos los casos totales son $\binom{n+r}{k}k!$. Para los casos favorables, notemos que son aquellos en que las primeras *k-1* bolas son negras, y la k-ésima es blanca. Luego, para las primeras *k-1*, tenemos que nos sirven todos los subconjuntos ordenados de tamaño *k-1* del conjunto de todas las bolas negras, que tiene tamaño r. Para cada uno de estos subconjuntos, tenemos n posibilidades, que corresponden a cada bolita blanca. Luego, los casos favorables son $\begin{pmatrix} r \\ k-1 \end{pmatrix} k!n$, y por ende la probabilidad pedida vale $\frac{n\begin{pmatrix} r \\ k-1 \end{pmatrix}(k-1)!}{\begin{pmatrix} n+r \\ k \end{pmatrix}k!} = \frac{n\begin{pmatrix} r \\ k-1 \end{pmatrix}}{k\begin{pmatrix} n+r \\ k \end{pmatrix}}$. *(3 ptos).*