Universidad de Chile **Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**

Control 1, MA34A, 14 de Abril 2008

PROFESOR: SERVET MARTÍNEZ
PROFESOR AUXILIAR: ANDRÉS FIELBAUM

P1.- Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.
Sean $A, B \in \mathcal{B}$ dos eventos. pruebe que

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B)\,.$$

b) (*Generalización de la desigualdad anterior*). Sean $A_1, \cdots, A_N \in \mathcal{B}$ una secuencia de N eventos. Pruebe que

$$[\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_i)] - (N-1) \leq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{N} A_i)\,.$$

c) Considere $\alpha > 0$ fijo. Sea $A_1, \cdots, A_N \in \mathcal{B}$ una secuencia de eventos que verifican $\mathbb{P}(A_i) \geq 1 - \frac{\alpha}{N}$ para todo $i = 1, \cdots, N$, Concluya de lo anterior que $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{N} A_i) \geq 1 - \alpha$.

P2.- a) Se tiene una caja con n bolas blancas y 1 bola negra y se dispone de un dado perfecto de 6 caras, es decir cada una de las caras tiene igual probabilidad de aparecer.

Se tira el dado, si sale par se sacan dos bolas de la caja (sin reposición) y si sale impar se saca sólo una. Calcule la probabilidad que en el dado haya salido un 6 sabiendo que la bola negra fue extraída.

b) Se tiene una caja que contiene n bolas blancas y r bolas negras. Se extraen k bolas sin reposición. Suponga que $0 \leq k - 1 \leq r$. Calcule la probabilidad que la $k-$ésima bola extraída sea la primera bola blanca que aparece.

P3.- a) Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sean $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ una secuencia de eventos en $\mathcal{B}$.

a1) Pruebe que si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.

a2) Pruebe que si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$

Hint. Recuerde que toda secuencia numerable de eventos en $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ verifica la propiedad de $\sigma-$sub aditividad: $\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

b) Sea Ω un conjunto no vacío y como es habitual notemos $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto de sus partes. Considere $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$ dos subconjunto de $\mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$. Pruebe que las $\sigma-$algebras generadas por estos conjuntos de partes verifican $\sigma(\mathcal{I}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_2)$.

Tiempo: 3:00 horas.

Nota: Todas las preguntas tienen igual valor y al interior de cada pregunta cada parte tiene igual valor.