Auxiliar Extra - MA3403

16 de Junio de 2010

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Franco Basso, Cristián Prado.

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de variables aleatorias.
Convergencia en probabilidad: X_n *converge en probabilidad* a X ssi

$$X_n \overset{P}{\to} X \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Convergencia casi segura (fuerte)
- *Def:* 2 variables aleatorias, X e Y, se dicen *casi seguramente iguales* ssi

$$X \overset{C.S}{=} Y \Leftrightarrow P(X = Y) = 1 \Leftrightarrow P(\omega \in \Omega | X(\omega) = Y(\omega)) = 1$$

- X_n *converge casi seguramente* a X ssi

$$X_n \overset{C.S}{\to} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} X_n \overset{C.S}{=} X \Leftrightarrow P(\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$$

Convergencia en ley de probabilidad (Permite aproximar X_n por X) X_n *converge en ley de probabilidad* a X ssi

$$X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ punto de continuidad de F}$$

Además, $$X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} G_n(t) = G(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Y si X_n es discreta, $$X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(X_n = x) = P(X = x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donde ϕ_n , ϕ, G_n , G son respectivamente las funciones características y generadora de momentos de X_n y de X

P1.- (Cálculo aproximado de integrales por método de Monte-Carlo)

A. Queremos encontrar el valor aproximado de la integral $I = \displaystyle\int_c^d u(t)dt$ donde u es una función $L^2(c, d)$ con valores en $\mathbb{R}$.

1) Escribir I de la forma $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ por medio de un cambio de variables.

2) Introducimos la variable aleatoria $Y = g(X)$ donde X es una variable aleatoria que sigue $\mathcal{U}(0, 1)$. Calcular $E(Y)$ y $V(Y)$.

3) Consideramos n variables aleatorias independientes $X_1, ..., X_n$, que siguen $\mathcal{U}(0, 1)$. Mostrar que las variables aleatorias $Y_i = g(X_i)$, $i = 1, ..., n$ son independientes y siguen la misma ley que Y.

4) Deducir que la sucesión de variables aleatorias $Z_n = \dfrac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)$ converge en *probabilidad* hacia I.

5) Aplicación: Tiramos al azar números x_i, $i = 1, ..., n$ en el intervalo $[0, 1]$ (por ejemplo con una calculadora). Definimos $y_i = g(x_i)$ y $z_n = \dfrac{1}{n}(y_1 + ... + y_n)$. Mostrar que, para n suficientemente grande, z_n constituye un valor aproximado de I *casi seguramente.*

B. Extender los resultados de **A.** a la integral $I = \displaystyle\int_G u(t)dt$ donde u es una función de $L^2(G)$ con valores en $\mathbb{R}$.

P2.-

a) **Aproximación de la distribución Binomial por la distribución de Poisson.**

Muestre que si n es suficientemente grande, y np se aproxima a un valor λ, es posible aproximar la distribución binomial $\mathcal{B}(n, p)$ por la distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Nota: En la práctica, utilizamos esta aproximación si $n > 50$, $np \leq 18$.

b) **Aproximación de la distribución de Poisson por la distribución normal.**

Muestre que si λ es suficientemente grande es posible aproximar la distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ por la distribución normal $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$

Nota: En la práctica, utilizamos esta aproximación si $\lambda > 18$.

c) **Aproximación de la distribución binomial por la distribución normal.**

Muestre que si n es suficientemente grande, es posible aproximar la distribución binomial $\mathcal{B}(n, p)$ por la distribución normal $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$

Nota: En la práctica, utilizamos esta aproximación si $np > 50$ y $nq > 5$. Aplicamos particularmente esta aproximación si $n > 50$ y $np > 18$.

P3.- Pruebe, usando la Ley fuerte de los grandes números, que para $\epsilon > 0$ dado, se cumple:

$$\text{i)} \lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n(1+\epsilon)\rfloor} \frac{n^k}{k!} = 1 \qquad \text{ii)} \lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n(1-\epsilon)\rfloor} \frac{n^k}{k!} = 0$$

donde $\lfloor x \rfloor$ indica el más grande de los enteros menores que x.

Ahora pruebe, usando el Teorema central del límite, que se verifica:

$$\text{iii)} \lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = 0$$

Hint: Recuerde que la suma de variables aleatorias de Poisson independientes, es una variable aleatoria de Poisson cuyo parámetro es la suma de los parámetros de las variables que se suman.