MA3403 - Probabilidades y Estadistica.
Profesor: Raul Gouet. **Auxiliares:** Franco Basso, Cristian Prado.

Auxiliar 13

9 de Julio 2010

P1. Considere una sucesión de va iid $X_1, X_2, ..., X_n$ con distribución de Pareto. Es decir:

$$P(X_1 \leq x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^c \text{, si } x \geq \theta$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido y $c > 0$ es una constante conocida. Considere la función $T(X_1, X_2, ..., X_n, \theta) = \frac{Z_n}{\theta}$ con $Z_n = \min(X_1, ..., X_n)$.

(a) Muestre que la distribución de Z_n es $F_{Z_n}(z) = 1 - \left(\frac{\theta}{z}\right)^{nc}$ si $z \geq \theta$.

(b) Verifique que T sirve como función pivote para θ.

(c) Contruya explícitamente un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para θ utilizando T como pivote. Calcule t_{α_1} y t_{α_2} de manera de que las probabilidades de los intervalos a la izquierda y a la derecha sean $\frac{\alpha}{2}$.

(d) Plantee el problema general para un intervalo de largo mínimo.

P2. Estudios relacionados con el comportamiento de ciertos bichos indican que estos tienden a organizarse al azar, linealmente, en un intervalo de longitud θ, a la derecha de un punto donde se ubica una feromona. Existe una controversia sobre el valor de θ entre dos equipos de científicos: en el laboratorio A se sostiene que $\theta \leq 1$ mientras que en el laboratorio B se sostiene lo contrario, es decir $\theta > 1$. Para resolver la controversia se diseña un experimento que consiste en medir las posiciones $X_1, ..., X_n$ de n bichos, con respecto a la feromona.

(i) Defina el modelo paramétrico correspondiente, indicando los supuestos que están implícitos.

(ii) Muestre que el TRV de nivel α para $H_0 : \theta \leq 1$ vs $H_1 : \theta > 1$ tiene región de rechazo dada por:

$$R = \{x \in X | \ \gamma_n(x) \geq k_\alpha\}$$

donde $\gamma_n(x) = \max\{x_1, ..., x_n\}$ y k_α se calcula imponiendo que el test tenga nivel de significación α.

(iii) Compruebe que $k_\alpha = (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}}$.

P3. Sean X, Y va con densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \text{ si } x \geq 1 \text{ y } y \geq 1.$$

Encuentre la función de densidad conjunta para las variables $U = XY$, $V = \dfrac{X}{Y}$.