Pauta Auxiliar 11 - MA3403

02 de Julio de 2010

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Franco Basso, Cristián Prado.

P0.- P3C3 2010

Sol.

Ver pauta en U-Cursos.

P1.- Para la distribución normal $\mathcal{N}(m, \sigma)$, determinar un intervalo de confianza para m, cuando σ es conocido.

Sol.

Definimos:

- Una M.A.S. $X_1, ..., X_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$
- La media empírica $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma/\sqrt{n})$.
- $Z = \frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Buscamos en la tabla de la distribución normal un valor z_α tal que

$$P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Con este valor z_α, construímos el intervalo de confianza.

$$P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(|Z| \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(\left|\frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(-z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \leq m \leq z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza para m, con nivel de riesgo α:

$$I = \left[-z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}, z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right]$$

P2.- Para la ley normal $\mathcal{N}(m,\sigma)$ donde σ es conocido, dado un valor m_0, testear la hipótesis nula

$$(H_0) : m = m_0$$

contra la hípótesis alternativa

$$(H1) : m \neq m_0$$

Sol.

Comenzamos de la misma forma que en el problema anterior. Definimos:

- Una M.A.S. $X_1, ..., X_n \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$
- La media empírica $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma/\sqrt{n})$.
- $Z = \frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Buscamos en la tabla de la distribución normal un valor z_α tal que

$$P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Con este valor z_α, construímos el test.

$$P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(|Z| \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(\left|\frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(-z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m \leq \bar{X} \leq z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m) = 1 - \alpha$$

Si $\bar{x} \in I = \left[-z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m_0, z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m_0\right]$, aceptamos (H_0) con un riesgo $\alpha\,\%$.

Si $\bar{x} \notin I$, rechazamos (H_0) con un riesgo de 5 %.