GUIA #6 DE EJERCICIOS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

MA-3403 Prof. R. Gouet, 15/06/10

1) Se escoge al azar (uniformemente) un punto de coordenadas (X, Y) en la región S del plano, definida por $S = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 4y + x \leq 4\}$. Determine las densidades marginales y condicionales $f_X, f_Y, f_{X/Y}, f_{Y/X}$ y diga si X e Y son independientes.

2) Estudie la independencia de las v.a. X, Y, cuyas densidades se presentan. En caso de dependencia calcule las densidades condicionales $f_{X/Y}, f_{Y/X}$.

   (i) $f_{X,Y}(x, y) = 15x^2/4$ para $0 \leq y \leq 1 - x^2$ y cero en otro caso.

   (ii) $f_{X,Y}(x, y) = 2xe^{-y}$ para $0 \leq x \leq 1; 0 < y < \infty$ y cero en otro caso.

   (iii) $f_{X,Y}(x, y) = 24xy$ para $x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1$ y cero en otro caso .

3) Sea (X, Y) vector aleatorio absolutamente continuo con densidad $f(x, y)$. Obtenga las densidades condicionales de X dado Y y de Y dado X en los siguientes casos.

   (i) $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} 1\!\!1_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}$.

   (ii) $f(x, y) = xe^{-x(y+1)} 1\!\!1_{\{0 \leq x, y\}}$.

4) Sean X, Y variables aleatorias absolutamente continuas con densidad conjunta

$$f(x, y) = Kx(y - x)e^{-y} 1\!\!1_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}.$$

   Calcule la constante K y muestre que

   (i) $f_{X|Y}(x|y) = 6x(y - x)/y^3 1\!\!1_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}$.

   (ii) $f_{Y|X}(y|x) = (y - x)e^{-(y-x)} 1\!\!1_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}$.

   (iii) Muestre que $E[X|Y = y] = y/2$ y $E[Y|X = x] = x + 2$.

5) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con ley de Poisson de parámetros respectivos $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Calcule la esperanza condicional $E(X|X + Y = z)$.

6) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con valores en $\{1, 2, \ldots, N\}$ y ley uniforme, es decir $P(X = k) = P(Y = k) = 1/N$ para $1 \leq k \leq N$. Calcule la esperanza condicional $E(X| \max\{X, Y\})$.

7) Sean X, Y variables aleatorias con densidad normal bivariada, dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \, e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2}}, \quad x, y \in I\!R.$$

   Compruebe que las variables aleatorias X y $Z = Y - \rho X$ son independientes.

8) Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ variables i.i.d. Poisson de parámetro λ. Se define la varianza muestral como la variable aleatoria $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$, donde $\overline{X}_n$ es el promedio de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Aplique la ley de grandes números (débil o L_2) para mostrar que S_n^2 converge casi seguramente hacia λ. Indicación: note que la sumas y funciones continuas de sucesiones que convergen, también convergen.

9) La empresa "Akomer" entrega servicio de colación diaria a los 1250 empleados de una industria. Cada persona tiene derecho a acompañar su colación con un máximo de 3 panes y se sabe que deciden independientemente la cantidad X de panes que cada uno consumirá, la cual puede considerarse como una v.a. discreta con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ y probabilidades $p_0 = 0.1, p_1 = 0.6, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1$. La empresa debe encargar previamente el número total de panes a un proveedor, siendo muy importante que nadie se quede sin su pan pero al mismo tiempo, intentando que no sobren demasiados porque eso iría a pérdida.

   (i) Calcule la esperanza y la varianza de la v.a. S definida como el número total de panes consumidos en la colación.

   (ii) Muestre que la función de distribución $F_S(x)$ de la v.a. S es aproximadamente $\Phi(\frac{x-1625}{27.58})$, donde Φ es la función de distribución de la v.a. normal $N(0, 1)$.

   (iii) Use el resultado de la parte (ii) para calcular aproximadamente el número de panes N que debe encargar al proveedor, de manera que la probabilidad de que todos queden satisfechos sea superior a 0.95. Exprese su resultado en términos de Φ o su inversa.

10) Una pastelería recibe el encargo de preparar una torta de novios para 100 personas, cuya masa contiene unas pequeñas pasas, muy sabrosas. El problema que debe resolver consiste en darle al pastelero una estimación del número N de pasas que debe distribuir en la masa, de manera la probabilidad de que un trozo contenga al menos 5 pasas, sea no inferior al 95%. **Indicación**: Suponga que las pasas se distribuyen al azar e independientemente en la masa y que N es bastante grande como para usar el Teorema Central del Límite. Exprese su resultado en términos de la función de distribución Φ de la normal $N(0, 1)$ o de su inversa.

11) Considere una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{a, b, c\}$, probabilidad inicial $\lambda = (0.1, 0.3, 0.6)$ y matriz de probabilidades de transición P, cuyas filas están dadas por $(0.3, 0.7, 0)$, $(0, 0.6, 0.4)$ y $(0.4, 0.1, 0.5)$. Calcule

   (i) $P[X_2 = a | X_1 = c]$
   (ii) $P[X_3 = b | X_1 = c]$
   (iii) $P[X_3 = b | X_1 = c, X_0 = c]$
   (iv) $P[X_2 = b]$
   (v) $P[X_1 = b, X_2 = c | X_0 = c]$
   (vi) $P[X_1 = c | X_2 = b]$