

EXAMEN DE PROBABILIDAD
MA-3401 Prof. R. Gouet, 30/06/09

- 1) Sean $N_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$, $N_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$ PPH independientes de tasas respectivas λ_1, λ_2 . Sea N el proceso de conteo definido por $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. El objetivo del ejercicio es mostrar que N es un PPH de tasa $\lambda_1 + \lambda_2$.
 - (i) Muestre que la distribución de $N(t)$ es poisson de parámetro $(\lambda_1 + \lambda_2)t, \forall t > 0$. Para ello se puede calcular la condicional de $N(t)$ en $N_1(t)$ o usar funciones generadoras de momentos.
 - (ii) Defina, en el marco de los procesos de conteo, los conceptos de incrementos independientes e incrementos estacionarios.
 - (iii) Muestre, a partir de las propiedades correspondientes de N_1 y N_2 que N tiene incrementos independientes y estacionarios.
 - (iv) Sabiendo que en el intervalo $[0, t]$ hay n puntos del proceso N , calcule la probabilidad de que k de ellos provengan del proceso N_1 .

- 2) Un audaz apostador posee un capital de 1M (millón), que espera llegar a triplicar en un juego de cara y sello con un bandido de muy mal carácter, que además va armado. El juego se desarrolla como una partida normal de cara-sello, donde cara tiene probabilidad p y sello tiene probabilidad q , con $p, q > 0, p + q = 1$. Si sale cara en una tirada el apostador gana 1M; si sale sello pierde 1M. Si el capital del apostador llega a 3M entonces se retira feliz. Si llega a 0M se retira arruinado. El juego evoluciona casi como el problema de la ruina del jugador excepto que, cada vez que la moneda sale cara, el bandido tiene una probabilidad $r > 0$ de sacar su arma y asaltar al apostador, llevándose todo el dinero y dejando al apostador con 0M (cuando sale sello no saca su arma). Se supone que la decisión del bandido de sacar el arma es independiente del capital que tenga el jugador.
 - (i) Modele el juego como una cadena de Markov, especificando su espacio de estados, su matriz de transición y dibuje el grafo asociado.
 - (ii) Clasifique los estados según la relación de comunicación e indique cuáles son recurrentes, transientes y absorbentes.
 - (iii) Calcule la probabilidad de que el apostador consiga su objetivo.

- 3) Sea X una va uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Se observa X y, sabiendo que $X = x$, se considera la va Y uniforme en el intervalo $[0, \sqrt{x}]$.
 - (i) Obtenga la densidad conjunta de (X, Y) .
 - (ii) Calcule $E(Y)$.
 - (iii) Obtenga la densidad marginal de Y .