Pauta Control # 3

1. Sean (X_n) una sucesión de va iid con $E(X_n) = 0, \forall n$.

   a) Muestre que $E(|X_n|) = \int_0^\infty P(|X_n| > x)dx$. **Sol.:** Sea $Y = |X|$ y F la función de distribución de Y. Entonces

$$E(Y) = \int_0^\infty yF(dy) = \int_0^\infty \int_0^y dtF(dy) = \int_0^\infty \int_t^\infty F(dy)dt = \int_0^\infty P(Y > t)dt.$$

   b) Muestre que $E(|X_n|) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty P(|X_n| > n\epsilon) < \infty, \forall \epsilon > 0$. **Sol.:** Notemos primero que podemos tomar $\epsilon = 1$ spg porque $E(|X_n|) < \infty \Leftrightarrow E(\epsilon|X_n|) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty P(\epsilon|X_n| > n\epsilon) < \infty$. Para concluir notamos que $E(|X_n|)$ se escribe como integral de la función decreciente $g(t) = P(|X_1| > t)$ y que la convergencia de la integral es equivalente a la convergencia de la serie de término general $g(n)$.

   c) Muestre que la sucesión (X_n/n) converge completamente[1] a 0. **Sol.:** De acuerdo con la definición de convergencia completa X_n/n converge completamente a 0 si $\sum_{n=1}^\infty P(|X_n/n| > \epsilon) < \infty$. Esto es claramente consecuencia de lo demostrado en (a) y (b), junto con la hipótesis de que X_n tiene esperanza finita.

   d) Sea $Y_n = (X_n + X_{n+1})/2, n = 1, 2, \ldots$. Muestre que $\overline{Y}_n \to 0$ casi seguramente. Indicación: Use la LGN y note que la convergencia completa implica la convergencia casi segura. **Sol.:** Notemos que

$$\overline{Y}_n = \overline{X}_n + \frac{X_{n+1} - X_1}{2n}.$$

   Por la LGN (fuerte) tenemos $\overline{X}_n \to 0$ c.s. Por otra parte, $X_{n+1}/n \to 0$ completamente, por lo demostrado en (c), de manera que también converge a 0 c.s. Además, es evidente que $X_1/n \to 0$ c.s. porque $\forall\, \omega \in \Omega$, $X_1(\omega)/n \to 0$. Juntando las convergencias parciales se llega a la conclusión.

2. Nos proponemos comparar dos métodos de tipo Montecarlo para calcular $I = \int_0^1 f(x)dx$, donde $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ es una función nonegativa y continua. Par ello consideramos dos sucesiones de va (X_n) e (Y_n). Suponga que las X_n son iid $U[0,1]$ y que las Y_n son iid $U[0,M]$, donde $M = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$. Suponga además que las X's son independientes de las Y's.

   Se definen los aproximantes

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i), \quad \widetilde{I}_n = \frac{M}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \le f(X_i)\}}.$$

   a) Muestre que ambos aproximantes convergen c.s. a I. **Sol.:** Observemos primero que las va $f(X_i)$ son iid con esperanza $E(f(X_i)) = \int_0^1 f(x)dx = I$ y de la LFGN tenemos $I_n \to I$ c.s. Por otra parte, las va $U_i = 1_{\{Y_i \le f(X_i)\}}$ también son iid con esperanza $P(Y_i \le f(X_i))$. Dado que los pares (X_i, Y_i) son iid uniformes en $[0,1] \times [0,M]$, resulta que $P(Y_i \le f(X_i))$ es el cociente entre el área bajo el gráfico de f y sobre el eje de abscisas, es decir I, y el área total que es M. Entonces

$$P(Y_i \le f(X_i)) = I/M.$$

   De la LFGN resulta entonces que $\widetilde{I}_n \to I$ c.s.

[1] Se dice que la sucesión de va (Y_n) converge completamente a Y si $\sum_{n=1}^\infty P(|Y_n - Y| > \epsilon) < \infty$.

b) Calcule las varianzas de I_n, $\widetilde{I}_n$ y compárelas para decidir bajo qué condiciones I_n es mejor que $\widetilde{I}_n$. **Sol.:** Para calcular las varianzas notamos que ambos aproximantes son sumas de va independientes, de manera que

$$Var(I_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(f(X_i)) = \frac{Var(f(X_1))}{n}.$$

Pero

$$Var(f(X_1)) = E[(f(X_1))^2] - (E(f(X_1)))^2 = \int_0^1 f(x)^2 dx - I^2 := I_2 - I^2.$$

Por otra parte,

$$Var(\widetilde{I}_n) = \frac{M^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(U_i) = M^2\frac{Var(U_1)}{n}$$

y $Var(U_1) = p(1-p)$, donde $p = P(Y_i \leq f(X_i)) = I/M$.
Diremos que I_n es mejor que $\widetilde{I}_n$ si $Var(I_n) \leq Var(\widetilde{I}_n)$, es decir, si

$$I_2 - I^2 \leq M^2\frac{I}{M}(1-\frac{I}{M}) = I(M-I) = MI - I^2,$$

equivalente a

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq M\int_0^1 f(x)dx.$$

La condición anterior siempre se cumple porque $0 \leq f(x) \leq M = \sup_{x\in[0,1]} f(x), \forall x \in [0,1]$.

3. La empresa *Akomer* entrega servicio de colación diaria a $n = 500$ estudiantes de una universidad. Cada estudiante tiene derecho a acompañar su colación con un máximo de 2 panes y se sabe que el estudiante i decide independientemente de los demás la cantidad X_i de panes que consumirá, la cual puede considerarse como una v.a. discreta con valores en el conjunto $\{0,1,2\}$ y probabilidades $p_0 = 0{,}1, p_1 = 0{,}8, p_2 = 0{,}1$. La empresa debe encargar previamente el número total de panes a un proveedor, siendo muy importante que nadie se quede sin pan pero al mismo tiempo, intentando que no sobren demasiados porque eso iría a pérdida.

   a) Calcule la esperanza y la varianza de la v.a. S_n definida como el número total de panes consumidos en la colación. **Sol.:** Dado que las va X_i son iid, resulta $E(S_n) = ne$ y $Var(S_n) = nv$, donde $e = E(X_1) = 0{,}1\cdot 0+0{,}8\cdot 1+0{,}1\cdot 2 = 1$ y $v = Var(X_1) = 0{,}1\cdot 0^2+0{,}8\cdot 1^2+0{,}1\cdot 2^2-1 = 0{,}2$.

   b) Muestre que la función de distribución $F_n(x)$ de la v.a. S_n es aproximadamente $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, donde Φ es la función de distribución de la v.a. normal $N(0,1)$ y μ, σ son parámetros que debe calcular. Explique el resultado de convergencia que está usando para aproximar $F_n(x)$. **Sol.:** Aplicando el TCL sabemos que

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{0{,}2n}}$$

   tiene distribución aproximada $N(0,1)$. Es decir, si $F_n(x) = P(S_n \leq x)$ entonces

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{0{,}2n}} \leq \frac{x-n}{\sqrt{0{,}2n}}\right) \sim \Phi\left(\frac{x-n}{\sqrt{0{,}2n}}\right) = \Phi\left(\frac{x-500}{10}\right).$$

   c) Use el resultado de la parte (ii) para calcular aproximadamente el número de panes N que debe encargar al proveedor, de manera que la probabilidad de que todos queden satisfechos (hay suficiente pan) sea superior a 0,95. Exprese su resultado en términos de Φ o su inversa. Notar que $\Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}645$. **Sol.:** Para que todos queden satisfechos hay que encargar N panes de manera que $N \geq S_n$. Queremos que esto ocurra con probabilidad al menos 0,95. Es decir,

$$P(S_n \leq N) \sim \Phi\left(\frac{N-500}{10}\right) > 0{,}95 \Leftrightarrow N > 10\Phi^{-1}(0{,}95) + 500 \sim 517.$$