Auxiliar 8 - MA3403

4 de Junio de 2010

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Franco Basso, Cristián Prado.

P1.- Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de variables aleatorias independientes que verifican: $E(X_n) = m$ para todo n y $\sigma(X_n) = \sigma$ para todo n. Considere la variable aleatoria $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$.

Muestre que la sucesión de variables aleatorias $\left\{\overline{X}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilidad a m a partir de la desigualdad de Chebychev y a partir del teorema débil de grandes números.

Deduzca que, para n suficientemente grande, todo valor de $\overline{X}_n$ constituye un valor aproximado de m *casi seguramente*.

P2.-

a) **Aproximación de la distribución Binomial por la distribución de Poisson.**

Muestre que si n es suficientemente grande, y np se aproxima a un valor λ, es posible aproximar la distribución binomial $\mathcal{B}(n,p)$ por la distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Nota: En la práctica, utilizamos esta aproximación si $n > 50$, $np \leq 18$.

b) **Aproximación de la distribución de Poisson por la distribución normal.**

Muestre que si λ es suficientemente grande es posible aproximar la distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ por la distribución normal $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$

Nota: En la práctica, utilizamos esta aproximación si $\lambda > 18$.

c) **Aproximación de la distribución binomial por la distribución normal.**

Muestre que si n es suficientemente grande, es posible aproximar la distribución binomial $\mathcal{B}(n,p)$ por la distribución normal $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$

Nota: En la práctica, utilizamos esta aproximación si $np > 50$ y $nq > 5$. Aplicamos particularmente esta aproximación si $n > 50$ y $np > 18$.

P3.- Pruebe, usando la Ley fuerte de los grandes números, que para $\epsilon > 0$ dado, se cumple:

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n(1+\epsilon)\rfloor} \frac{n^k}{k!} = 1 \qquad \text{ii) } \lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n(1-\epsilon)\rfloor} \frac{n^k}{k!} = 0$$

donde $\lfloor x \rfloor$ indica el más grande de los enteros menores que x.

Ahora pruebe, usando el Teorema central del límite, que se verifica:

$$\text{iii) } \lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = 0$$

Hint: Recuerde que la suma de variables aleatorias de Poisson independientes, es una variable aleatoria de Poisson cuyo parámetro es la suma de los parámetros de las variables que se suman.