Solución Control # 2

1. Considere una colonia de bacterias con población inicial n_0. En cada generación la cantidad de bacterias puede multiplicarse por $\lambda > 1$, con probabilidad p, o dividirse por λ con probabilidad $1-p$. La multiplicación o división de la población ocurre de manera independiente en cada período.

   Considere la variable aleatoria X_n, que mide la población de bacterias en la generación n.

   a) (1 pto.) Pruebe que X_n toma valores en el conjunto $\{\lambda^k n_0\}_{k=-n}^{n}$. Es decir, $X_n = \lambda^{U_n} n_0$, donde U_n es una variable aleatoria discreta que toma valores en $\{-n, ..., n\}$.

   Solución: Lo probaremos por inducción en n. Caso Base: La población inicial es $n_0 = \lambda^0 n_0$. Paso inductivo: Supongamos que en el periodo n la población puede tomar valores en $\{\lambda^k n_0\}_{k=-n}^{n}$. Usando esta hipótesis e independencia en cada periodo, se tiene que en el periodo $n+1$ hay dos casos posibles: Si la población se multiplica en λ, los resultados estarán en $\{\lambda^{k+1} n_0\}_{k=-n}^{n}$; Si la población se divide, los resultados estarán en $\{\lambda^{k-1} n_0\}_{k=-n}^{n}$. Luego, para el período $n+1$ los resultados estarán, en cualquier caso, en el conjunto $\{\lambda^k n_0\}_{k=-(n+1)}^{n+1}$.

   Consideremos $Y = \lambda^{U_n} n_0$ en donde U_n es una variable aleatoria discreta que toma valores en $\{-n, ..., n\}$. Los valores que toma Y están en $\{\lambda^k n_0\}_{k=-n}^{n}$. Si además $\mathbb{P}(X_n = \lambda^k n_0) = \mathbb{P}(U_n = k)$, entonces las variables aleatorias X_n y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

   Defina las variables aleatorias R_n :"Cantidad de veces que la población se multiplicó" y L_n : "Cantidad de veces que la población se dividió". Notar que $R_n + L_n = n$.

   b) (2 ptos.) Encuentre la distribución de probabilidades de R_n y de L_n y exprese U_n en términos de R_n.

   Solución: Notemos que la variable R_n puede ser vista como la cantidad de "éxitos" (la población se multiplicó) en un total de n intentos. Por lo tanto, la variable R_n sigue una distribución Binomial de parámetros n y p, $R_n \sim Bi(n, p)$.

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in 0, 1, ..., n$$

   Usando que $L_n = n - R_n$ se tiene que:

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \mathbb{P}(n - R_n = k) = \mathbb{P}(R_n = n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k, \qquad k \in 0, 1, ..., n$$

   Utilizando la igualdad de números combinatorios $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, se tiene que

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k, \qquad k \in 0, 1, ..., n$$

   es decir, $L_n \sim Bi(n, 1-p)$.
   Podemos escribir la variable U_n en términos de L_n y R_n de acuerdo a la siguiente relación: $U_n = R_n - L_n = R_n - (n - R_n) = 2R_n - n$.

   c) (3 ptos.) Encuentre $\mathbb{P}(U_n = k)$ y use este resultado para encontrar la distribución de probabilidades de X_n.

   Solución: Usando la relación encontrada en la parte anterior, se calcula

$$\mathbb{P}(U_n = k) = \mathbb{P}(2R_n - n = k) = \mathbb{P}\left(R_n = \frac{n+k}{2}\right).$$

Notemos que R_n toma valores en $\{0,1,...,n\}$. Esto implica que si $\frac{n+k}{2} \notin \{0,1,...,n\}$, entonces $\mathbb{P}(R_n = \frac{n+k}{2}) = 0$. Por otra parte, si $\frac{n+k}{2} = m \in \{0,1,...,n\}$, entonces $\mathbb{P}(R_n = \frac{n+k}{2}) = \binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$.
Esto lo podemos reescribir como:

$$\mathbb{P}\left(R_n = \frac{n+k}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n+k \text{ impar} \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{n-\frac{n+k}{2}} & n+k \text{ par} \end{cases}$$

2. Sean X e Y son variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}, \quad x \geq 1,\, y \geq 1.$$

a) (3 ptos.) Encuentre la función de densidad conjunta para las variables $U = XY$ y $V = X/Y$. Es decir, la densidad del vector (U,V).

Solución: Utilizaremos el Teorema de Cambio de Variables. Notemos que si $u(x,y) = xy$ y $v(x,y) = \frac{x}{y}$, se tiene que $x(u,v) = \sqrt{uv}$ e $y(u,v) = \sqrt{u/v}$. Sin embargo, se requiere que $x(u,v) \geq 1$ y que $y(u,v) \geq 1$. Esto nos entrega condiciones sobre las variables (u,v), es decir, $uv \geq 1$ y $\frac{u}{v} \geq 1$. Por lo tanto, consideremos el conjunto $D = \{(u,v) : 1 \leq u, \frac{1}{u} \leq v \leq u\}$ y la transformación:

$$T : [1,\infty) \times [1,\infty) \to D$$
$$(x,y) \to T(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

Esta transformación es biyectiva.

- T es inyectiva: Supongamos que $T(x,y) = T(w,z)$. Entonces:

$$(1)\ xy = wz \quad \wedge \quad (2)\ \frac{x}{y} = \frac{w}{z}.$$

  Como $x,y,z,w > 0$, despejando x de (1) y reemplazándolo en (2) se obtiene $y = z$, lo que implica en (1) que $x = w$. Luego, $(x,y) = (w,z)$.
- T sobreyectiva: Sea $(a,b) \in D$. Entonces, considerando $x = \sqrt{ab} \geq 1$ y $y = \sqrt{\frac{a}{b}} \geq 1$, se tiene que $T(x,y) = (a,b)$. Notar que esto no es cierto si no restringimos la llegada de T al conjunto D.

La transformación inversa de T es:

$$T^{-1} : D \to [1,\infty) \times [1,\infty)$$
$$(u,v) \to T^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix}$$

Calculamos el módulo del determinante del Jacobiano de la transformación inversa:

$$|det(J_{T^{-1}}(u,v))| = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{-1\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

Consideremos un punto $(u,v) \in D$. Se tiene que:

$$f_{X,Y}(T_1^{-1}(u,v), T_2^{-1}(u,v))|det(J_{T^{-1}}(u,v))| = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2v} = \frac{1}{2u^2v}$$

Luego, la densidad conjunta para el vector aleatorio (U,V) está dada por:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2u^2v} & (u,v) \in D \\ 0 & (u,v) \notin D \end{cases}.$$

b) (3 ptos.) Encuentre las densidades marginales para U y V.

Solución:

Consideremos $u \geq 1$. La densidad marginal de U es:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)dv = \int_{\frac{1}{u}}^{u} \frac{1}{2u^2v}dv = \frac{1}{2u^2}\left[\ln v\right]\Big|_{1/u}^{u} = \frac{1}{2u^2}[\ln u - \ln(1/u)] = \frac{\ln u}{u^2}$$

Consideremos $v > 0$. La densidad marginal de V es:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)du = \int_{\max\{1/v,v\}}^{\infty} \frac{1}{2u^2v}du = \frac{1}{2v}\left[\frac{-1}{u}\right]_{\max\{1/v,v\}}^{\infty} = \frac{1}{2v\max\{1/v,v\}} = \frac{1}{\max\{2,2v^2\}}.$$

3. El Presidente de la Academia de Ciencias de un lejano país, ha organizado un debate para zanjar el problema de generar al azar una cuerda en una circunferencia de radio R. Un académico propone dibujar un radio y escoger sobre él un punto al azar, de acuerdo con la ley Uniforme en $[0,R]$ y luego, en dicho punto, trazar una perpendicular al radio, definiendo así una cuerda. Un segundo académico propone dibujar un par de radios que formen un ángulo Θ, escogido al azar, con ley uniforme en $[0,\pi]$, y construir la cuerda uniendo los extremos de los radios. Para orientar la discusión, el presidente contrata a un estudiante de MA3401 (usted, por ejemplo) cuya misión es

a) Determinar, si es que existe, la densidad de probabilidad del largo de la cuerda en cada uno de los métodos propuestos

Solución: En el primer método se debe escoger un punto al azar sobre un radio y luego trazar una perpendicular al radio en dicho punto. Si designamos por X la distancia de dicho punto al centro de la circunferencia resulta que X es una v.a. uniforme $U[0,R]$. Por otra parte, el largo de la cuerda por dicho punto (usando el teor. de Pitágoras) es $Y = g(X) = 2\sqrt{R^2 - X^2}$. La función $g(x)$ es decreciente estricta en $[0,R]$, su derivada es $g'(x) = -2x/\sqrt{R^2 - x^2}$ y su inversa es $g^{-1}(y) = \sqrt{R^2 - y^2/4}$. Notar que la derivada se anula en $x = 0$ y no existe en $x = R$. Ambos valores podemos ignorarlos por X es v.a. continua. Aplicamos a continuación la fórmula de cambio de variable en una dimension para obtener

$$f_Y(y) = f_X((g^{-1}(y))/|g'(g^{-1}(y))| = \frac{1}{R}\mathbf{1}_{[0,R]}(\sqrt{R^2 - y^2/4})\frac{y}{4\sqrt{R^2 - y^2/4}}.$$

o bien

$$f_y(y) = \frac{1}{2R}\frac{y}{\sqrt{4R^2 - y^2}}\mathbf{1}_{[0,2R[}(y).$$

En el segundo método nos damos un radio cualquiera y escogemos al azar un ángulo $\theta \in [0,\pi]$. Trazamos un nuevo radio que forme ángulo θ con el anterior y unimos los extremos para determinar la cuerda. Como antes, el problema es definir el largo de la cuerda como función de θ, digamos $h(\theta)$. En el triángulo determinado por el centro de la circunferencia y los extremos de los radios aplicamos la "ley de senos"(por ejemplo), notando que el triángulo es isósceles con ángulos θ (en el vértice del origen) y los otros son $(\pi - \theta)/2$. Entonces, por la ley de senos tenemos

$$h(\theta) = R\frac{\sin(\theta)}{\sin(\pi/2 - \theta/2)}.$$

Más fácil aún es mirar la mitad del triángulo y observar que $h(\theta)/2$ es la proyección del radio R con ángulo $\pi/2 - \theta/2$. Se obtiene de inmediato que

$$h(\theta) = 2R\sin(\theta/2).$$

Vemos que h es creciente estricta en $[0,\pi]$, su derivada es $h'(\theta) = R\cos(\theta/2)$ y su inversa es $h^{-1}(y) = 2\arcsin(\frac{y}{2R})$. Notamos que hay problema en $\theta = \pi/2$ pero esto no es grave porque θ es v.a. continua.

Aplicamos la fórmula de cambio de variable:

$$f_Y(y) = f_X((g^{-1}(y))/|g'(g^{-1}(y))| = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[0,\pi]}(2\arcsin(\frac{y}{2R}))\frac{2}{\sqrt{4R^2-y^2}}.$$

o bien

$$f_y(y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{4R^2-y^2}}\mathbf{1}_{[0,2R[}(y).$$

b) Calcular los respectivos valores esperados y varianzas.

Solución: Para calcular esperanzas y varianzas podemos usar las densidades recién calculadas o las originales. Por ejemplo,

$$E(g(X)) = \int_0^R \frac{1}{R}g(x)dx = \int_0^R \frac{2}{R}\sqrt{R^2-x^2}dx = R\frac{\pi}{2}$$

y

$$E(h(\theta)) = \int_0^\pi \frac{1}{\pi}h(\theta)d\theta = \frac{2R}{\pi}\int_0^\pi \sin(\theta/2)d\theta = R\frac{4}{\pi}.$$

Para las varianzas calculamos la esperanza del cuadrado y restamos el cuadrado de la esperanza. Tenemos

$$E(g(X)^2) = \int_0^R \frac{1}{R}g(x)^2dx = \int_0^R \frac{4}{R}(R^2-x^2)dx = R^2\frac{8}{3}$$

y

$$V(g(X)) = R^2\left(\frac{8}{3}-\frac{\pi^2}{4}\right).$$

Análogamente

$$E(h(\theta)^2) = \int_0^\pi \frac{1}{\pi}h(\theta)^2d\theta = \frac{4R^2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(\theta/2)d\theta = 2R^2$$

y

$$V(h(\theta)) = R^2(2-\frac{16}{\pi^2}).$$

4. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) (1.2 ptos) Encuentre las densidades marginales de X e Y. ¿Son X e Y variables independientes?

Solución: Si $x \notin [0,1]$, entonces $f_X(x) = 0$. Sea $x \in [0,1]$. La densidad marginal de X es:

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)dy = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Por simetría debemos tener que $f_Y = f_X$.

Si las variables fuesen independientes se debería cumplir que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Sin embargo,

$$f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}\right) \neq \frac{3}{2}(x^2+y^2).$$

Es decir, las variables no son independientes.

b) (1.2 ptos) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x|Y=y)$ y $f_{Y|X}(y|X=x)$.
Solución: Nuevamente nos centraremos en el caso $x, y \in [0,1]$, pues en otro caso vale cero o no está definida.

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = 3\frac{x^2+y^2}{3y^2+1}.$$

$$f_{Y|X}(y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = 3\frac{x^2+y^2}{3x^2+1}.$$

c) (1.2 ptos) Calcular $\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2}\,|X = \frac{1}{2})$ y $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}\,|Y \le \frac{1}{2})$.
Solución: Para calcular la probabilidad condicional utilizamos la parte anterior:

$$\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2}\,|X = \frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} 3\frac{(1/2)^2+y^2}{3(1/2)^2+1}dy = \frac{1}{2}.$$

Para calcular la otra probabilidad no se requiere usar densidades condicionales, simplemente probabilidades condicionales.

$$\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}\,|Y \le \frac{1}{2}) = \frac{\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}\,, Y \le \frac{1}{2})}{\mathbb{P}(Y \le \frac{1}{2})} = \frac{1/8}{5/16} = \frac{2}{5}.$$

d) (1.2 ptos) Encuentre $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$.
Solución:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3 + \frac{x}{2}dx = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}.$$

Por simetría, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}x^4 + \frac{x^2}{2}dx = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9+5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

Por simetría, $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2)$.
Luego $\mathrm{Var}(X) = \frac{7}{15} - \frac{25}{64} = 0,076$. Por simetría nuevamente, $\mathrm{Var}(Y) = 0,076$.

e) (1.2 ptos) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y=y)$. **Solución:**

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \int_0^1 x \cdot 3\frac{x^2+y^2}{3y^2+1}dx = \frac{1}{3y^2+1}\left[\frac{3}{4} + \frac{3}{2}y^2\right].$$