Pauta Auxiliar 6 - MA3403

14 de Mayo de 2010

Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Franco Basso, Cristián Prado.

P3.- Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, de densidad f_X y f_Y respectivamente. Encontrar, mediante el método del jacobiano, la función de densidad de $W = X + Y$ y $Z = X/Y$.

Recuerdo: Método del Jacobiano o del cambio de variable.

De forma general, nos interesa calcular la distribución de un vector aleatorio $Y = (Y_1, ..., Y_n) = g(X)$ que es función de otro vector $X = (X_1, ..., X_n)$.

$$Y = g(X) \Leftrightarrow (Y_1, ..., Y_n) = (g_1(X_1, ..., X_n), ..., g_n(X_1, ..., X_n))$$

X e Y tienen la misma dimensión.

Supongamos que X admite una densidad de probabilidad f_X. Llamemos $\mathcal{A}= X(\Omega)$ el conjunto de valores que toma X, y $\mathcal{B}$ el conjunto de llegada de g.

$$g : U \subseteq \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

Como conocemos la densidad de X, podemos escribir para todo conjunto $A \subseteq \mathcal{A}$:

$$P((X_1, ..., X_n) \in A) = \int_A f_X(x_1, ..., x_n) dx_1....dx_n$$

Queremos hacer un cambio de variables: Y=g(X). Recordemos el procedimiento visto en cursos anteriores.

Típicamente escribimos

$$\int_A f_x((x_1, ..., x_n)) dx_1....dx_n = \int_{g(A)} f_X(g^{-1}(y_1, ..., y_n)) |\mathbf{J}| dy_1....dy_n$$

Donde $|\mathbf{J}|$ es el **determinante del jacobiano** de g^{-1}: $\mathbf{J}_{ij} = \dfrac{\partial g_i^{-1}}{\partial y_j}$.

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & ..... & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_1} & ..... & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Nota 1: notar cuál índice cambia en las filas y cuál en las columnas.

Nota 2: g_i^{-1} es la i-ésima componente de g^{-1}, no la inversa de g_i!.

Nota 3: Esto en $\Re$ corresponde al cambio de variables en la integral de 1 dimensión: $\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u^{-1}(x))du$ con $du = u'(x)dx$.

Veamos qué hipótesis debe cumplir g para poder realizar el cambio de variables.

1. No es necesario definir g en todo el conjunto $\mathcal{A}$, basta con un conjunto abierto $U \subseteq \mathcal{A}$ tal que se cumpla
$$P((X_1, ..., X_n) \in U) = \int_U f_X(x)dx = 1.$$
2. $g : U \to \mathcal{B}$ debe ser biyectiva. Denotamos por $g^{-1} : \mathcal{B} \to U$ la inversa de g.
3. g, g^{-1} deben ser continuas y tener derivada continua en $\mathcal{A}$. g, g^{-1} clase $\mathcal{C}_1$.
4. El jacobiano de g^{-1} debe estar bien definido en todo U. Para esto, basta que el determinante del jacobiano de g no se anule en U.

Notemos que (1) implica que podemos sacar un número finito (o infinito numerable) del dominio de la función sin cambiar el resultado de la integral. En particular, si el jacobiano se anula en un punto en U, basta redefinir el conjunto U sacando el punto. Veremos un ejemplo de esto en el segundo ejercicio.

Luego, con el cambio de variable

$$\int_A f_x((x_1, ..., x_n))dx_1....dx_n = \int_{g(A)} f_X(g^{-1}(y_1, ..., y_n))|\mathbf{J}|dy_1....dy_n$$

Deducimos la densidad de probabilidad de una variable aleatoria Y = g(X) a partir de la densidad de la variable X.

$$f_Y(y_1, ..., y_n) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(x_1, ..., x_n))|\mathbf{J}| & \text{si } x \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

Notemos que conocer el conjunto de llegada $calB$ es sumamente importante para poder definir la densidad. Esto no siempre es fácil de determinar.

Ejemplo: X e Y variables aleatorias independientes. $W = X + Y$.

Para aplicar el cambio de variable, necesitamos un vector imagen con la misma dimensión. Definamos los vectores $X_1 = (X, Y)$ y $X_2 = (Z, Y) = (X + YY)$. Este paso es muy importante: como queremos calcular la densidad de un vector de dimensión menor, construímos un vector de igual dimensión rellenando el resto de las componentes con los valores en el vector original. Una vez que calculemos la densidad de este vector, calcularemos la densidad marginal de la primera componente y tendremos lo pedido.

Escribimos la función inversa,

$$g^{-1}(Z,Y) = (X,Y) = (Z-Y,Y)$$

Y el determinante del jacobiano de la función inversa es:

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial(z-y)}{\partial z} & \frac{\partial(z-y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(y)}{\partial z} & \frac{\partial(y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Luego, aplicando el método del jacobiano

$$\int_A f_{XY}(x,y) = \int_b f_{XY}(g^1(z,y)) \cdot 1 \cdot dzdy = \int_b f_{XY}(z-y,y)dzdy$$

Luego, la densidad del vector (Z,Y) está dada por

$$f_{ZY}(z,y) = f_{XY}(z-y,y)$$

Y por independencia de X e Y,

$$f_{ZY}(z,y) = f_X(z-y)f_Y(y)$$

Luego, como nos interesa solamente la densidad de Z, calculamos la densidad marginal.

$$f_Z = \int_{\mathcal{B}_\mathcal{Y}} f_{ZY}(z,y)dy = \int_{\mathcal{B}_\mathcal{Y}} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

Propuesto : Determinar los límites de integración (para esto, hay que determinar el conjunto de llegada de g, que es un triángulo. Hacer un dibujo.). Notar que el resultado es el producto de convolución de X e Y. Resolver para X e Y N (0,1). Comparar con el resultado de la pregunta 1 de la auxiliar.