Control 3 – Probabilidades y Estadística – 2010

Iván Rapaport

Pregunta 3. Se hacen repeticiones independientes de un experimento. Cada uno de los experimentos tiene probabilidad de éxito p. Sea N la v.a que representa el número de repeticiones hasta alcanzar el primer éxito. Sea Y la v.a que es igual a 1 si el primer experimento es éxito y 0 si el primer experimento es fracaso.

a.- (2 puntos) Demuestre, condicionando en Y, que $E(N)=\frac{1}{p}$.

b.- (3 puntos) Demuestre, condicionando en Y, que $E(N^2)=\frac{2-p}{p^2}$.

c.- (1 punto) Encuentre $Var(N)$.

Solución

a.- En primer lugar notamos que $N \sim Geométrica(p)$.

La esperanza de N, condicionada en Y, está dada por:

$$E(N)=E(N/Y=1)P(Y=1)+E(N/Y=0)P(Y=0)$$

Del enunciado se tiene que $P(Y=1)=p$ y que $P(Y=0)=1-p$.

Además, dado que N corresponde al número de repeticiones hasta alcanzar el primer éxito, si se sabe que $Y=1$, entonces, en ese caso, N vale claramente 1. Esto se traduce a que $E(N/Y=1)=1$.

Por otro lado, si se sabe que Y vale 0, entonces ya sé que voy a tener que realizar más de un experimento para obtener un éxito. Luego, y en base también a la definición de esperanza, se tiene que $E(N/Y=0)=E(N+1)=E(N)+1$.

Finalmente, reemplazando valores, se tiene:

$$E(N)=1\cdot p+\left[E(N)+1\right](1-p)$$

$$\Leftrightarrow pE(N)=1$$

$$\therefore E(N)=\frac{1}{p}$$

b.- Análogo al caso anterior, la esperanza de N^2 condicionada en Y está dada por:

$$E\left(N^2\right)=E\left(N^2/Y=1\right)P\left(Y=1\right)+E\left(N^2/Y=0\right)P\left(Y=0\right)$$

Ya sabemos que $P\left(Y=1\right)=p$ y que $P\left(Y=0\right)=1-p$.

Además, usando el mismo fundamento que en la parte (a), se tiene que $E\left(N^2/Y=1\right)=1^2=1$.

En cuanto a la esperanza de N^2 cuando se sabe que el primer experimento no fue un éxito ($Y=0$), se tiene:

$$E\left(N^2/Y=0\right)=E\left(\left(N+1\right)^2\right)=E\left(N^2+2N+1\right)=E\left(N^2\right)+2E\left(N\right)+E\left(1\right)$$

De (a) se sabe que $E\left(N\right)=\frac{1}{p}$, y como $E\left(1\right)=1$, se obtiene: $E\left(N^2/Y=0\right)=E\left(N^2\right)+\frac{2}{p}+1$.

Entonces, reemplazando valores y despejando se concluye que

$$E\left(N^2\right)=1\cdot p+\left[E\left(N^2\right)+\frac{2}{p}+1\right]\left(1-p\right)$$

$$\Leftrightarrow pE\left(N^2\right)=\frac{2}{p}-1$$

$$\therefore E\left(N^2\right)=\frac{2-p}{p^2}$$

c.- La varianza se obtiene utilizando los resultados de (a) y (b) como sigue:

$$Var(N)=E\left(N^2\right)-\left[E\left(N\right)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow Var(N)=\frac{2-p}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow Var(N)=\frac{2-p-1}{p^2}$$

$$\therefore Var(N)=\frac{1-p}{p^2}$$

NOTA: Los términos $E\left(N/Y=0\right)$ y $E\left(N^2/Y=0\right)$ también podían ser calculados mediante la fórmula de esperanza condicional (con sumatorias). En estos casos, los resultados que se obtenían eran:

$$E\left(N/Y=0\right)=\frac{p+1}{p} \quad \textbf{y} \quad E\left(N^2/Y=0\right)=\frac{p^2-p^3+4}{p^2\left(2-p\right)}$$

Criterio:

- A aquellos que hicieron correctamente el cálculo de dichas esperanzas condicionales utilizando sumatorias, se les asignó todo el puntaje.
- A quienes sólo pusieron cuánto debían valer estas esperanzas condicionales no se les asignó puntaje si no se mostraba el procedimiento (pues era fácil despejarla y ver cuánto tenía que valer para obtener el resultado pedido).