PAUTA PREGUNTA 2

Hay n personas en un salón y todos dejan sus sombreros en el suelo. Los sombreros se revuelven y cada una de las personas escoge al azar un sombrero. Sea X la v.a que representa el número de personas que se queda con su propio sombrero.

a- **Pruebe que E(X)= 1. (2 ptos)**

Se define X como el número de personas que queda con su propio sombrero:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{donde:}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & Si\ la\ persona\ i - ésima\ escoge\ su\ propio\ sombrero. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Entonces, se calcula la esperanza:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$$

Por definición de esperanza (y de probabilidades totales) se tiene que:

$$E(x_i) = 1 * P(x_i = 1) + \ 0 * P(x_i = 0)$$

Y la probabilidad de que la persona i-ésima escoja su sombrero (casos favorables versus casos totales):

$$P(x_i = 1) = \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad E(x_i) = 1 * P(x_i = 1) + 0 = \frac{1}{n}$$

Volviendo a la ecuación inicial:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \qquad \blacksquare$$

b- **Pruebe que VAR(X)= 1. (4 ptos)**

Por cómo se definió la v.a X, se tiene que:

$$VAR(X) = VAR\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Aplicando propiedades de la varianza, el término anterior se puede descomponer de la siguiente manera:

$$VAR\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} VAR(x_i) + \sum_{i\neq j} COV(x_i, x_j)$$

Se resolverá entonces cada término por separado:

- $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} VAR(x_i)}$**:**

$$\sum_{i=1}^{n} VAR(x_i) = \sum_{i=1}^{n} E({x_i}^2) - E^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} E({x_i}^2) - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} E(x_i) - \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

(Observación: $E({x_i}^2) = E(x_i)$ pues ${x_i}^2 = x_i$ dado que los valores que toma son 1 o 0)

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} VAR(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} = n * \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{n}$$

- $\boldsymbol{\sum_{i\neq j} COV(x_i, x_j)}$**:**

$$\sum_{i\neq j} COV(x_i, x_j) = E(x_i, x_j) - E(x_i) * E(x_j) = E(x_i, x_j) - \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

(Observación:

$$E(x_i, x_j) = 1 * 1 * P(x_i = 1, x_j = 1) + 1 * 0 * P(x_i = 1, x_j = 0)$$
$$+ 0 * 1 * P(x_i = 0, x_j = 1) + 0 * 0 * P(x_i = 0, x_j = 0)$$

$$\rightarrow E(x_i, x_j) = P(x_i = 1, x_j = 1) = P(x_i = 1) * P(x_j = 1 | x_i = 1) = \frac{1}{n} * \frac{1}{n-1}$$

(n-1) es porque si la primera persona sacó un sombrero, la segunda tiene uno menos para poder elegir.)

$$\rightarrow \sum_{i\neq j} COV(x_i, x_j) = \sum_{i\neq j} \frac{1}{n} * \frac{1}{n-1} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{i\neq j} \frac{1}{n^2 * (n-1)}$$

Ahora, para sacar la sumatoria, se calcula el número de parejas posibles entre n individuos:

$$\sum_{i \neq j} COV(x_i, x_j) = 2 * \binom{n}{2} * \frac{1}{n^2 * (n-1)} = \frac{2 * n!}{(n-2)! * 2!} * \frac{1}{n^2 * (n-1)} = \frac{1}{n}$$

Finalmente:

$$VAR(X) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1 \quad \blacksquare$$