UChile	**Probabilidades**	**Joaquín Fontbona**
FCFM	**MA3401-1**	Héctor Olivero
DIM	**Otoño'10**	Víctor Riquelme

Clase Auxiliar 12

Problema 1 (Simulación de variables aleatorias por método de "aceptación-rechazo") *Sean f y g dos densidades de probabilidad en $\mathbb{R}^d$. Se cuenta con unn lenguaje informático que es capaz de simular realizaciones de variables aleatorias de densidad g. El lenguaje también puede generar variables aleatorias de ley $Unif(0,1)$.*

Suponga que todas las realizaciones distintas de v.a. (cualesquiera) son independientes. Suponga ademas que existe una constante $c \in (1,\infty)$ tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{f(x)}{g(x)} \leq c$$

y que las funciones g y f son ambas conocidas y sus valores calculables en todo punto $x \in \mathbb{R}^d$.

El objetivo de este problema es construir, bajo las hipótesis anteriores, un método que permite simular una variable aleatoria Z cuya ley tiene densidad f.

Para eso, considere una sucesión $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. i.i.d. en R^d con densidad g, y una sucesión $(U_n)_{n\geq 1}$ de v.a. i.i.d. de ley $Unif[0,1]$ independientes de las v.a.$(X_n)_{n\geq 1}$.

(i) *Verifique que $\mathbb{P}(g(X_n)=0)=0$ para todo $n \geq 1$*

(ii) *Pruebe que*

$$\mathbb{P}\left(U_n \geq \frac{f(X_n)}{cg(X_n)}\right) = 1-p$$

donde $p \equiv \frac{1}{c}$

(iii) *Se define la variable aleatoria*

$$T(\omega) = \inf\left\{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \;\middle|\; U_n(\omega) < \frac{f(X_n(\omega))}{cg(X_n(\omega))}\right\}$$

Calcule $\mathbb{P}(T>k)$ y deduzca que T tiene ley geometrica de parámetro p.

(iv) *Sea ahora $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un boreliano. Pruebe que*

$$\mathbb{P}\left(U_n < \frac{f(X_n)}{cg(X_n)} \quad , \quad X_n \in A\right) = \frac{1}{c}\int_A f(z)dz$$

Se define ahora la v.a. Z como $Z(\omega) \equiv X_{T(\omega)}(\omega)$ o, dicho de otra forma,

$$Z = X_m \quad \text{en el evento} \quad \{T=m\}$$

(v) *Para $A \subseteq \mathbb{R}^d$ boreliano y $m \geq 1$, exprese el evento $\{Z\in A, T=m\}$ en términos sólo de las v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ y $(U_n)_{n\geq 1}$, y deduzca de esto y todo lo anterior que*

$$\mathbb{P}(Z \in A) = \int_A f(z)dz$$

(vi) *En base a las partes anteriores describa un algoritmo para simular v.a. $Z_1, \ldots, Z_k$ i.i.d. con densidad f.*

Problema 2 *Se sabe que un átomo individual del isótopo radiactivo Carbono 14 ($C14$), despues de haberse constituido o sintetizado, se degrada tras un "tiempo de vida" aleatorio, que tiene ley exponencial de parámetro λ. Al hacerlo, se transforma en un átomo estable de Carbono "usual" ($C12$). Además, la desintegración de un átomo no tiene ninguna influencia sobre átomos próximos.*
Por otro lado, es sabido que cada organismo vivo absorbe constantemente átomos de $C14$, de forma tal que la razón entre la cantidad de átomos de este isótopo y la cantidad total de átomos de Carbono que porta (es decir, $C12$ más $C14$) es constante durante su vida e igual a un número $\alpha \in (0,1)$ conocido. Sin embargo, cuando muere, ya no absorbe mas $C14$, y la proporción de $C14$ comienza a disminuir debido a la degradación de los átomos de isótopo.

(i) *Se estudia el tejido de un organismo muerto no hace mucho tiempo. Explique por que es razonable suponer, en base a todo lo anterior, que todos los átomos de $C14$ hayados en el presente tejido (es decir, aquellos que no se han degradado todavía) fueron sintetizados en el momento de la muerte del organismo.*

(ii) *En base a lo anterior, y suponiendo que la cantidad de átomos de $C14$ en el tejido es muy grande, muestre que la proporción $\beta \in (0,1)$ de átomos de C14 que no se han desintegrado (entre el total de átomos de $C14$ presentes al momento de la muerte) es, pasado un tiempo t desde la muerte del organismo, aproximadamente igual a $e^{-\lambda t}$*

(iii) *En cierto instante se calcula la masa total de Carbono del tejido, siendo esta iguala m. Por otro lado, se determina que la masa de $C14$ en el mismo tejido es m'. ¿Hace cuanto tiempo murió el organismo estudiado?*