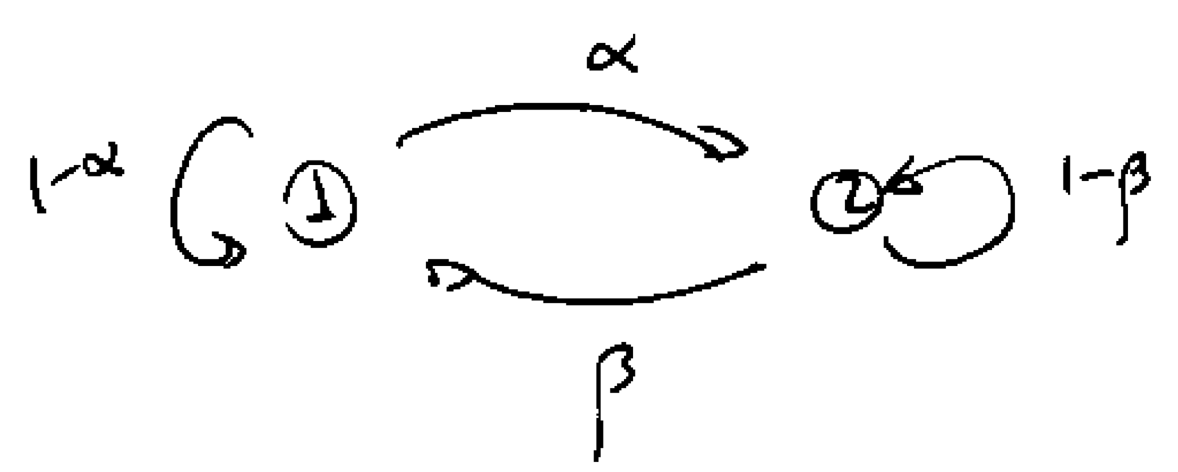
Problema Considere un proceso de Markov con el siguiente diagrama de transiciones:



Calcular la probabilidad de pasar de 1 a 1 en n pasos.

Sol Escribamos la matriz de transiciones:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Sabemos que $P^{(n)} = P^n = P^{n-1} \cdot P$

Luego, $p_{11}^{(n)} = p_{11}^{(n-1)} \cdot (1-\alpha) + p_{12}^{(n-1)} \beta$

Además, por ser matriz estocástica, $p_{11}^{(n-1)} + p_{12}^{(n-1)} = 1$

$$\Rightarrow \quad p_{11}^{(n)} = p_{11}^{(n-1)}(1-\alpha) + \left(1 - p_{11}^{(n-1)}\right)\beta = p_{11}^{(n-1)}(1-\alpha-\beta) + \beta$$

con $p_{11}^{(1)} = p_{11} = 1-\alpha$ (o si se quiere, $p_{11}^{(0)} = 1$).

Este sistema tiene solución única

$$p_{11}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n & \alpha+\beta > 0 \\ 1 & \alpha+\beta = 1 \end{cases}$$

Recuerdo: $x_{n+1} = a x_n + b$

↳ solución de: $x = ax + b \rightarrow x(1-a) = b$

$\rightarrow x = \frac{b}{1-a} \qquad a \neq 1$

↳ $y_n = x_n - \frac{b}{1-a}$ satisface $y_{n+1} = a y_n \rightarrow y_n = a^n y_0$

↳ si $a \neq 1$, $x_n = A a^n + \frac{b}{1-a}$

↳ si $a = 1$, $x_n = x_0 + nb$

Problema [Ruina del Jugador]

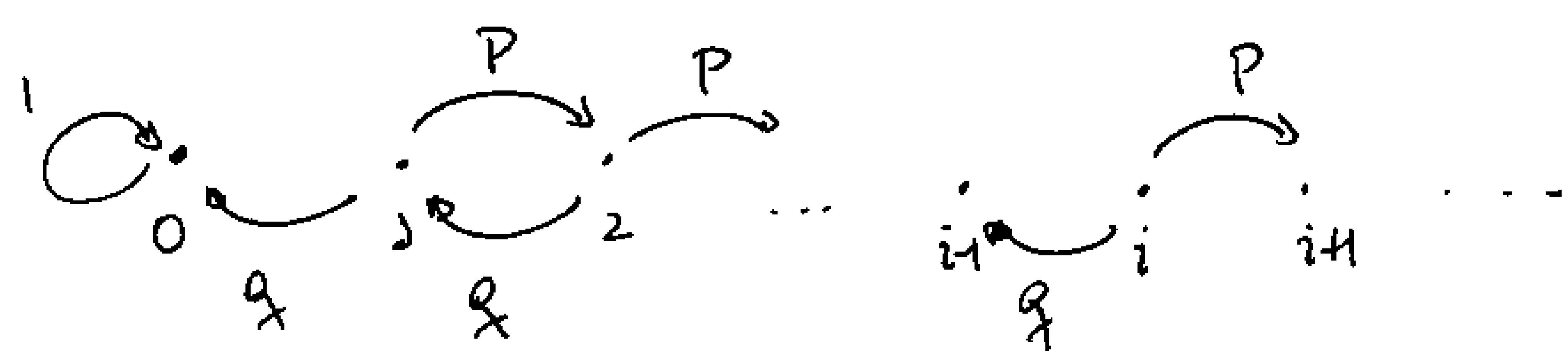
Imagine que Ud entra al casino con una riqueza de \$$i$ y juega apostando (\$1 por turno); con probabilidad p dobla y con probabilidad q pierde. ($p \in (0,1) \wedge q = 1-p \in (0,1)$). Los recursos del casino son infinitos (pero los suyos no). ¿Cuál es la probabilidad de que Ud quiebre? Modele el problema como cadena de Markov.

Sol Se puede modelar el problema como una cadena de Markov con conjunto de estados $E = \mathbb{N}$ donde $j \in E$ representa la fortuna (o riqueza) que Ud posee en cierto instante de tiempo. La distribución inicial vendría siendo (ya que se parte con \$$i$ en el bolsillo),

$$\lambda = \delta_i$$

y la matriz de transición será $P_{jk} = \begin{cases} p & k = j+1 \\ q & k = j-1 \end{cases}$ (salvo en $j=0$, que es cuando se quiebra y no se puede seguir jugando)

y el diagrama de transiciones es



Llamemos $\tau_0 = \inf\{n > 0 \mid X_n = 0\}$ el instante de llegada a 0 (tiempo de parada).

y $h_i = \mathbb{P}(\tau_0 < \infty \mid X_0 = i)$ la probabilidad de quiebra dado que se parte con riqueza inicial i.

Se sabe que $(h_i)_{i \in E}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$h_0 = 1$$

$$h_i = p h_{i+1} + q h_{i-1} \quad , i = 1, 2, \dots$$

Esta ecuación tiene como ecuación característica

$$\alpha = p\alpha^2 + q \rightarrow p\alpha^2 - \alpha + q = 0$$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2p} \rightarrow 1 - 4p(1-p)$$

- si $p = q = 1/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

- si $p \neq q$, las raíces son $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = \frac{q}{p}$

La solución general sería en este caso

$$h_i = \lambda \alpha_1^i + \beta \alpha_2^i = \lambda + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

Ahora, $h_0 = 1 = \lambda + \beta$

- si $p < q$, como pedimos que h_i sea probabilidad (i.e., $h_i \in (0,1)$) se requiere que $\beta = 0$ (o si no, la solución explota).
  Luego, $\lambda = 1$ y la ruina es casi segura.

- si $p > q$, como $h_0 = 1$ se obtiene una familia de soluciones

$$h_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i + A\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^i (1-A) + A$$

donde para una solución no negativa se debe tener $A \geq 0$, entonces la solución minimal no negativa es $h_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i$

- Si $p = q = 1/2$, la recurrencia tiene ~~forma~~ solución de la forma

$$h_i = A + Bi$$

como $h_i \in (0,1)$, entonces $B = 0$ y $A = 1$, por lo que también se quiebra.

Problema Sea (X_n) cm de matriz P, sobre un conjunto E. Sea $F \subseteq E$ y τ el tiempo de llegada a F y, para $z \in [-1,\infty)$ fijo, $\psi(i) = \mathbb{E}_i\left(z^{\tau} \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right)$.

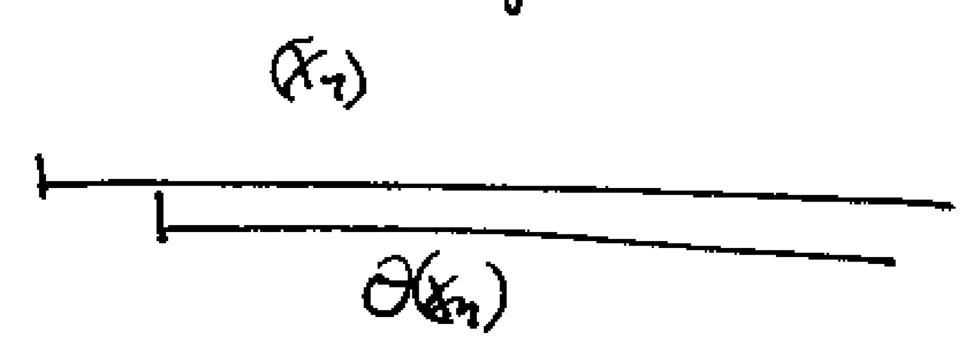
Mostrar que ψ es solución de
$$\begin{cases} \psi(i) = zP\psi(i) & i \in F^c \\ \psi(i) = 1 & i \in F \end{cases}$$

Sol Sea $i \in F$. Entonces, $\tau = 0$ en este caso, por lo que $z^{\tau} = 1$ ok.

Ahora, sea $i \in F^c$. Escribamos

$\cancel{\theta (X_n)_{n\geq 0} = (X_{n+1})_{n\geq 0}}$

θ el operador shift



Entonces,
$$\begin{aligned}
\psi(i) &= \mathbb{E}_i\left(z^{\tau}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right) \\
&= \mathbb{E}_i\left(z^{1+\tau\circ\theta}\mathbb{1}_{\{\tau\circ\theta<\infty\}}\right) \\
&= \mathbb{E}_i\left(\mathbb{E}\left(z^{1+\tau\circ\theta}\mathbb{1}_{\{\tau\circ\theta<\infty\}} \mid \mathcal{F}_1\right)\right) \\
&= \mathbb{E}_i\left(z\,\mathbb{E}_{X_1}\left(z^{\tau}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right)\right) \\
&= z\,\mathbb{E}_i\left(\psi(X_1)\right) \\
&= z\sum_{k\in E} p_{ik}\psi(k) \\
&= zP\psi(i).
\end{aligned}$$

Prop de Markov:

$\mathbb{E}_{\mu}(\phi\circ\theta_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{X_n}(\phi)$

$\mathbb{E}_{\mu}(\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\phi\circ\theta_{\tau} \mid \mathcal{F}_{\tau}) = \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{E}_{X_{\tau}}(\phi)$

Donde $X_n \circ \theta_p = X_{n+p}$

Problema Sea (X_n) CM sobre $E=\{0, \ldots, n\}$ con matriz de transición P dada por

$$P_{ij} = \begin{cases} p & j=i+1 \\ q & j=0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad 0 \le i \le n-1 \qquad p\in(0,1),\ q+p=1.$$

y n es absorvente.

Clasificar los estados de la cadena.

Sea τ el tiempo de entrada en n. ¿Cuanto vale $\mathbb{E}_i(\tau)$, con $i \in E$?

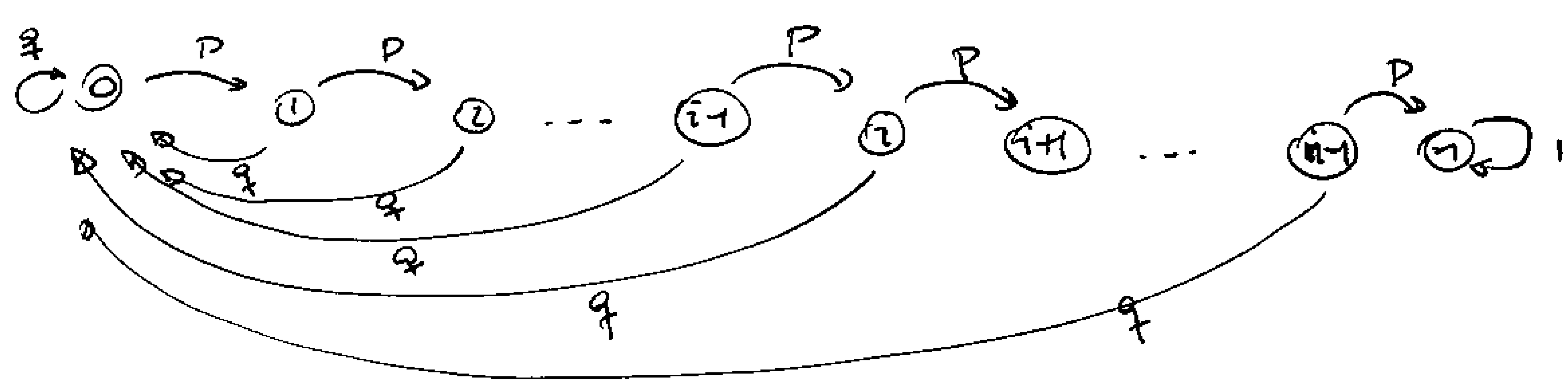
Sol El estado n es recurrente. Además, se ve que cualquier estado $i \in \{0 \ldots n-1\}$ conduce a cualquier otro estado $j \in E$, pero de n no se puede salir.

Entonces $\{0 \ldots n-1\}$ es una clase transiente y $\{n\}$ es clase recurrente.

Ahora, para calcular $\mathbb{E}_i(\tau) = k_i$, se sabe que $k = (k_i)$ es la solución positiva mas pequeña de

$$k_i = \sum P_{ij} k_j + 1 \qquad i \neq n$$
$$k_i = 0 \qquad i = n$$

Escribamos las ecuaciones:



$$\boxed{k_i = p\, k_{i+1} + q\, k_0 + 1}$$

En detalle: $k_{n-1} = 1 + q k_0$ $\qquad k_0 = 1 + q k_0 + p k_1$

$k_{n-2} = 1 + q k_0 + p k_{n-1}$

...

Reemplazando, se tiene

$$K_{n-2} = 1 + p + q(1+p)k_0$$

$$K_{n-3} = 1+p+p^2 + q(1+p+p^2)k_0$$

$$\vdots$$

$$K_i = 1+p+\cdots+p^{n-i-1} + q(1+p+\cdots+p^{n-i-1})k_0$$

$$\vdots$$

$$k_0 = 1+p+\cdots+p^{n-1} + q(1+p+\cdots+p^{n-1})k_0$$

$$k_0 = \frac{1-p^n}{1-p} + q\,\frac{1-p^n}{1-p}k_0$$

$$\Rightarrow k_0 = \frac{1-p^n}{p^n(1-p)}$$

Reemplazando, $K_i = \dfrac{1-p^{n-i}}{p^n(1-p)}$ //