Guia 2

1 de abril de 2010

Profesor: Joaquín Fontbona. Auxiliar: Hector Olivero

1. a) Dados tres eventos A, B y C, exprese los siguientes eventos como conjuntos: Sólo ocurre A; ocurren A y B pero C no; al menos uno de los 3 eventos ocurre; al menos dos de los eventos ocurre; los tres ocurren; ninguno de los tres ocurre; a lo más uno de los tres ocurre; a lo más dos de ellos ocurren; exactamente dos de los tres ocurren; a lo más ocurren los tres eventos. Calcule la probabilidad de cada uno de ellos en términos de $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$, $\mathbb{P}(C \cap B)$ y/o $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

   b) Juan, Pedro y Emilio lanzan por turnos una moneda, y gana el primero que obtiene cara. (Suponga que ese es el orden en que lanzan). Explique porque puede tomarse como espacio muestral $\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, \dots\}$ y describa los eventos "gana Juan", " gana Pedro" y "gana Juan o Pedro".

   c. 10 parejas se sientan al al azar en una mesa redonda. Calcular la probabilidad de ninguna pareja quede junta. (Ind: Sea E_i el evento "La pareja i quedó sentada junta" y calcule $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{10} E_i)$).

2. Se probará que en el experimento "se lanza un dado infinitas veces", con probabilidad 1 el 6 aparece infinitas veces. Se supondrá que el dado es equilibrado. (La demostración es distinta a la vista en clases, siga los pasos indicados).

   a. Describa el espacio muestral Ω. Sea A_n el evento "se obtiene un 6 en el $n-$ésimo lanzamiento", y defina $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ y $B_{n,m} := \bigcup_{k=n}^{m} A_k$. Interprete estos eventos. Muestre que $B_n \supseteq B_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, que $B_{n,m} \subseteq B_{n,m+1}$ para todo $m \geq n$, y que se tiene la igualdad
   $$\bigcup_{m \geq n} B_{n,m} = B_n.$$

   b. Calcule $\mathbb{P}((B_{n,m})^c)$ y deduzca que $\mathbb{P}(B_n) = 1$.

   c. Sea A el evento "se obtienen infinitos 6's". Pruebe que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ (Ind.: para cada una de las inclusiones puede razonar por contradicción). Usando esto, demuestre que
   $$\mathbb{P}(A) = 1.$$

3. a) Se ponen 2 torres en un tablero de ajedrez desocupado. Cuál es la probabilidad de que "no se puedan comer" entre ellas?

   b) Se reparten las 52 cartas de un naipe. Cuál es la probabilidad de que la $14-$ava carta repartida sea un as? Cuál es la probabilidad de que el primer as repartido sea en la $14-$ava carta repartida?

   c) En la época de Galileo estaba de moda el juego llamado "pasadiez" que consistía en lanzar 3 dados, y el jugador ganaba si la suma era superior a diez y perdía en el caso contrario. Muestre que el juego es "justo", es decir, las probabilidades de perder y de ganar son iguales. (Indicación: utilizando el hecho que las caras opuestas de un dado suman 7, pruebe que a cada resultado que hace ganar le corresponde un único que hacer perder). Un jugador presentó a Galileo la siguiente "paradoja": "El número 11 sale con más frecuencia que el 12, y el 10 con más frecuencia que el 9, a pesar de que estos 4 números pueden obtenerse cada uno como la suma de 6 tríos distintos de números." Muestre que el razonamiento del jugador era equivocado, y que debería esperase que el 11 y el 10 salgan alrededor de 1.0809 veces más seguido que el 12 y el 9. Este es uno de los primeros cálculos rigurosos de probabilidades, y fue hecho por Galileo. (Notar que el jugador tenía razón, por poco, en su observación de las frecuencias).

4. Se lanza un par de dados hasta que su suma es 5 o 7. Cuál es la probabilidad de que salga 5 (antes de 7)? (Ind.: Sea E_n el evento "sale un 5 en la $n-$ésima lanzada, y en las $n-1$ primeras no sale ni 5 ni 7". Pruebe que la probabilidad buscada es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$ y calcule $\mathbb{P}(E_n)$.)

5. Un juego de dados tiene las siguientes reglas: Se lanzan 2 dados. Si las suma es $2, 3$ o 12 el jugador pierde. Si es 7 u 11, gana. Si es otro número, el jugador continua a lanzar los dos dados hasta que el resultado sea o bien el resultado que obtunvo inicialmente, o bien un 7. Si es un 7, pierde. Si es el resultado inicial, gana. Calcule la probabilidad de que el jugador gane. (Ind.: sea E_i el evento "el resultado inicial es i y el jugador gana". Explique porque la probabilidad buscada es igual a $\sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(E_i)$ y calcule $\mathbb{P}(E_i)$. Para esto, note (y pruebe) que $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_{i,n})$, donde $E_{i,n}$ es el evento "el resultado inicial es i y el jugador gana en la $i-$ésima tirada.)

6. En un parque nacional hay 20 huemules, de los cuales 5 son capturados, marcados y devueltos a la naturaleza. Un año más tarde, se capturan 4 de los 20. Cuál es la probabilidad de que 2 de los 4 hayan sido marcados antes?

7. Se tienen 3 cartas en una caja, una de color negra por ambas caras, una de color rojo por ambas caras, y una de una cara negra y una roja. Se saca una carta, de la cuál sólo se ve un lado, que es rojo. Si tuviera que apostar por el color de la otra cara, hay alguna diferencia en apostar por rojo o negro? Qué apostaría Ud.? (Ind.: Como siempre, tenga cuidado con cuáles son "resultados equiprobables").

8. Se tienen dos urnas, la urna I tiene 5 bolas blancas y 7 bolas negras. La urna II tiene 3 blancas y 12 negras. Se lanza una moneda equilibrada. Si el resultado es cara, sea saca una bola de la urna I, si es sello, de la urna II. Si después de este procedimiento, se obtuvo una bola blanca, cuál es la probabilidad de que en la moneda haya salido cara?

9. Una urna contiene n bolas negras y r rojas. Se saca una de ellas al azar, y se devuelve a la urna, junto con m bolas nuevas del mismo color. Luego, se saca una segunda bola. Pruebe que la probabilidad de que la primera bola sea negra, dado que la segunda fue roja, es $\frac{n}{n+r+m}$.

10. En una pastelería, al pastelero A le quedan el 20 por ciento de los pasteles malos, al pastelero B el 30 y al C el 50 por ciento. Suponga que A hace el 50 por ciento de los pasteles, B el 30, y C el 20 por ciento. Un cliente encontró un pastel mal hecho. Qué tan probable es que la culpa sea de A?

11. Se tienen 10 monedas distintas y no equilibradas. Más precisamente, para la moneda i, "cara" sale con probabilidad $\frac{i}{10}$. Se escoge una de las monedas al azar y se lanza, obteniendose cara. Cuál es la probabilidad de que haya sido la quinta moneda?

12. a) Se saca una carta al azar de una baraja de naipes usual. Muestre que los eventos "se sacó un as" y "se sacó un corazón" son independientes.

    b) Considere un experimento $E1$ con n resultados posibles y otro experimento $E2$ con m resultados posibles, no excluyentes con los de $E1$. Muestre que los nm resultados posibles del experimento de efectuar $E1$ y después $E2$ son equiprobables, si y sólo si $E1$ y $E2$ tienen cada uno resultados equiprobables y los eventos "en $E1$ se obtuvo i" y "en $E2$ se obtuvo j" son independientes para todo $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}$. Verifique que esto último equivale a decir que $E1$ y $E2$ son independientes.

13. Una bola se encuentra en alguna de N cajas. Con probabilidad p_i se encuentra en la caja i. Cuando la bola se encuentra en la caja i y uno busca la bola ahí, la encuentra con probabilidad α_i Pruebe que la probabilidad de que la bola esté en la caja j, dado que no se econtró cuando se la buscó en la caja i, es $\frac{p_j}{1-\alpha_i p_i}$, si $j \neq i$, o $\frac{(1-\alpha_i)p_i}{1-\alpha_i p_i}$, si $i = j$.

14. En una caja hay dos bolas. Se sabe que cada una fue pintada de color blanco o negro con probabilidad $\frac{1}{2}$ para cada color, y esto de manera independiente entre ambas bolas.

    Le informan a Ud. que al menos una de las bolas es blanca. Dado esto, cuál es la probabilidad de que las dos lo sean? Suponga ahora que no le han dado ninguna información y que Ud. saca una bola al azar, que resulta ser blanca. Dado lo anterior, cuál es ahora la probabilidad de que las dos lo sean?

15. a. Sea Ω un espacio muestral y B un evento con $\mathbb{P}(B) > 0$. Se sabe que la aplicación que a $A \subset \Omega$ asocia $\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$ es una medida probabilidad (pruebelo si no lo sabía). En base a esto, decimos que dos eventos A_1 y A_2 son independientes condicionalmente a B si son independientes para la medida de probabilidad $\mathbb{P}_B$, es decir, si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B)\mathbb{P}(A_2|B)$.

       Construya ejemplos simples de que "A_1 independiente de A_2" no es condicón necesaria ni suficiente para que A_1 y A_2 sean independientes condicionalmente a B.

    b. Se sabe que el 20% de la población chilena sufre de depresión. El plan SUPERULTRAGOLD de la Isapre Winnermédica otorga licencia por depresión teniendo un 90% de certeza de que el paciente sufre la enfermedad. Un paciente llega a la Isapre con los diagnósticos de dos Doctores A y B que indican que tiene depresión. La Isapre estima que que cuando se sufre de depresión, el Dr. A diagnostíca la enfermedad en el 99% de los casos, y el Dr. B en el 98%. Pero además, cuando no se está enfermo de depresión, el Dr. A "diagnostíca" esta enfermedad en el 60% de los casos y el Dr. B en el 30% (es decir, dan licencias falsas).

       Con esta información, debe la isapre otorgarle licencia a este paciente? Indicación: suponga que condicionalemente al estado de salud del paciente, los diagnósticos de los dos doctores son independientes.

16. Se lanza sucesivamente un dado. Calcule la probabilidad de que salga un 6 antes que un 1. Para esto, puede calcular primero la probabilidad del evento A_n dado por "en los primeros $n-1$ lanzamientos no sale ni un 6 ni un 1, y en el $n-$ésimo lanzamiento sale un 6". Verifique que $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ y deduzca el resultado.

17. Juan y Pedro lanzan una moneda (no neceseriamente equiblibrada) sucesivas veces, haciendo la siguiente apuesta: Juan gana si salen n caras antes de que hayan salido m sellos. En caso contrario, gana Pedro. Suponga que en cada lanzamiento, la probabilidad de que salga cara es p.

    a) Muestre que para que ocurran n caras antes de m sellos, es necesario y suficiente que ocurran al menos n caras en los primeros $m+n-1$ lanzamientos.

    b) Pruebe que la probabilidad de que en una serie de N lanzamientos, k determinados de ellos resulten cara (es decir, por ejemplo, para $N = 10$, el primero, el cuarto y el décimo son $k = 3$ lanzamientos determinados) es igual a $p^k(1-p)^{N-k}$

    c) Deduzca que la probabilidad de que Juan gane es

$$\sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^k (1-p)^{m+n-1-k}.$$