Tarea 4

29 de abril de 2010

1. Sea G un grupo y sea G' el subgrupo de G generado por todos los elementos de la forma $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Definamos $G^{(1)}$ como G'. Si $G^{(n)}$ está definido, definamos $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$. Demuestra que G es soluble si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$ para el cual se cumple que $G^{(n)} = \{1\}$

2. Sea R un anillo conmutativo y sean $a, b \in R$. Diremos que a divide a b si existe $x \in R$ tal que $ax = b$. Si a divide a b y b divide a a diremos que a y b son asociados. Un elemento $0 \neq a \in R$ se dice *primo* si no es una unidad y cada vez que a divide a pq entonces a divide a p o a divide a q. Un elemento $0 \neq a \in R$ se dice *irreducible* si no es una unidad y si $a = bc$ entonces b es unidad o c es unidad.

   a) Demuestra que todo elemento primo de R es irreducible.

   b) Si R es un DIP, entonces a es primo si y solo si a es irreducible.

   c) Da un ejemplo de un elemento irreducible que no es primo.

3. Sea D un DIP y considera una cadena de ideales

   $$(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq (a_3) \subseteq \cdots (a_n) \subseteq (a_{n+1}) \cdots$$

   Demuestra que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(a_k) = (a_m)$, $\forall k \geq n$.